

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 16



Ярославль 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИКА
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 16

Ярославль
Издательство ЯГТУ
2021

УДК 51:378
ББК 22.1
М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 16. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. – 120 с.

ISBN 978-5-9914-0906-3

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, информатики и методике их преподавания, а также математического моделирования технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А. В. Бородин, Д. О. Бытев, И. М. Каневский, Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов Санкт-Петербургского университета государственной противопожарной службы МЧС России; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, доцент Ярославского филиала Физико-технологического института им. К.А. Валиева РАН.

ISBN 978-5-9914-0906-3

© Ярославский государственный
технический университет, 2021

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.925.52

В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

К ВОПРОСУ О БИФУРКАЦИИ ЦИКЛА СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Исследована нормальная автономная система дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром и с кубической полиномиальной нелинейной частью. Установлен коэффициентный признак бифуркации устойчивого цикла от особой точки.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, качественная теория, бифуркация цикла, модель нелинейного осциллятора.

V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

TO THE QUESTION ABOUT BIFURCATION OF A CYCLE OF PLANE SYSTEMS

We investigate a normal autonomous system of second-order differential equations with a small parameter and a cubic polynomial nonlinear part. The coefficient condition for the bifurcation of a stable cycle from a singular point is established.

Keywords: differential equation, qualitative theory, cycle bifurcation, nonlinear oscillator model.

Проблема существования и бифуркации цикла исследована во многих фундаментальных и прикладных работах. Классические результаты по этой проблеме приведены, например, в книгах [1, 2].

Однако при исследовании мягкого режима возбуждения автоколебаний в прикладных задачах остаются недостаточно изученными вопросы применения компьютерных технологий. Для их применения требуются признаки бифуркации устойчивого цикла в терминах коэффициентов модели осциллятора. Чтобы установить такой признак, применим результаты работ [3, 4].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + f(x, \mu), \quad (1)$$

в которой $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$ – малый параметр,

$$f(x, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2(d_1x_1 + d_2x_2) + \mu(b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2) + c_1x_1^3 + c_2x_1^2x_2 + c_3x_1x_2^2 + c_4x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Задача: установить, при каких свойствах коэффициентов функции $f(x, \mu)$, в системе (1) происходит бифуркация рождения от нулевой особой точки орбитально асимптотически устойчивого цикла.

Так как локально при нулевом значении параметра система (1) близка к линейной системе $\dot{x} = Ax$, все решения которой являются 2π -периодическими, то для системы (1) естественно рассматривать цикл, соответствующий решению с периодом, близким к 2π . Выполним в системе (1) замену переменной $t = (1 + \lambda)\tau$, где λ – малый параметр. Получим систему вида

$$\frac{dv}{d\tau} = Av + \lambda Av + (1 + \lambda)f(v, \mu). \quad (2)$$

Так как при выполненной замене изменяется лишь параметризация траекторий, то справедливо следующее утверждение, которое будем использовать в дальнейших рассуждениях.

Лемма. Система (1) имеет орбитально асимптотически устойчивое решение $x(t, a, \mu)$ с периодом $\omega = (1 + \lambda)2\pi$ тогда и только тогда, когда система (2) имеет орбитально асимптотически устойчивое 2π -периодическое решение $v(\tau, a, \lambda, \mu)$, $v(0, a, \lambda, \mu) = a$.

Составим для системы (2) так называемое бифуркационное уравнение, связывающее начальное значение периодического решения с параметрами системы. Решение системы (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(\tau, a, \lambda, \mu) = X(\tau)a + \lambda X(\tau) \int_0^\tau X(-s)Av(s, a, \lambda, \mu)ds + \\ + (1 + \lambda)X(\tau) \int_0^\tau X(-s)f(v(s, a, \lambda, \mu), \mu)ds,$$

в котором $X(\tau) = e^{zA}$. Поэтому оператор сдвига по траекториям на 2π , неподвижные точки которого являются начальными значениями

2π -периодических решений системы (2), в окрестности нулевой особой точки имеет вид

$$v(2\pi, a, \lambda, \mu) = a + q(a, \lambda, \mu) + \psi(a, \lambda, \mu), \quad (3)$$

где $q(a, \lambda, \mu) = 2\pi\lambda Aa + p(a, \mu)$, векторная форма $p(a, \mu)$ 3-го порядка и функция $\psi(a, \lambda, \mu)$ удовлетворяют равенствам

$$p(a, \mu) + \tilde{p}(a, \mu) = \int_0^{2\pi} X(-s)f(X(s)a, \mu)ds,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-3} \|\tilde{p}(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0,$$

$$\psi(a, \lambda, \mu) = \lambda \int_0^{2\pi} X(-s)Av(s, a, \lambda, \mu)ds + (1 + \lambda) \int_0^{2\pi} X(-s)f(v(s, a, \lambda, \mu), \mu)ds - q(a, \lambda, \mu),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-3} \|\psi(\alpha a, \alpha^2 \lambda, \alpha \mu)\| \equiv 0.$$

Итак, в силу равенства (3) система (2) имеет бифуркационное уравнение

$$q(a, \lambda, \mu) + \psi(a, \lambda, \mu) = 0_2, \quad (4)$$

в котором первое приближение – это функция вида

$$q(a, \lambda, \mu) = \frac{\pi}{4} \left(4\mu^2 d_2 a_1 - (4\mu^2 d_1 + 8\lambda) a_2 + (a_1^2 + a_2^2)(h_1 a_1 - h_2 a_2) \right),$$

$$a = (a_1, a_2)^T, \quad h_1 = 3c_4 + c_2, \quad h_2 = 3c_1 + c_3.$$

Решение уравнения (4) целесообразно искать в виде

$$a = a(\alpha) = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha)), \quad a_0 \neq 0_2, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{a}(\alpha) = 0_2;$$

$$\mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)), \quad \mu_0 \neq 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\mu}(\alpha) = 0;$$

$$\lambda = \lambda(\alpha) = \alpha^2(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha)), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\lambda}(\alpha) = 0.$$

Без ограничения общности рассуждений можно предполагать, что $\|a_0\|_2 = 1$. При этом направление бифуркации периодического решения определяется условием [3]

$$q(a_0, \lambda_0, \mu_0) = \frac{\pi}{4} B(a_0, \lambda_0, \mu_0) a_0 = 0_2, \quad (5)$$

в котором

$$B(a_0, \lambda_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} 4\mu_0^2 d_2 + h_1 & -(4\mu_0^2 d_1 + 8\lambda_0 + h_2) \\ 4\mu_0^2 d_1 + 8\lambda_0 + h_2 & 4\mu_0^2 d_2 + h_1 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения условия (5) необходимо, чтобы имело место равенство

$$\det B(a_0, \lambda_0, \mu_0) = (4\mu_0^2 d_2 + h_1)^2 + (4\mu_0^2 d_1 + 8\lambda_0 + h_2)^2 = 0. \quad (6)$$

Для справедливости равенства (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$4\mu_0^2 d_2 + h_1 = 0, \quad (7)$$

$$4\mu_0^2 d_1 + 8\lambda_0 + h_2 = 0. \quad (8)$$

При этом $B(a_0, \lambda_0, \mu_0) = 0_{22}$ и условие (5) выполняется для любого a_0 , удовлетворяющего условию $\|a_0\|_2 = 1$.

С помощью теоремы о неявной функции устанавливается [3], что при условии (5) для бифуркации периодического решения достаточно выполнения условия

$$\text{rang } Q = 2, \quad Q = \frac{\partial q(a_0, \lambda_0, \mu_0)}{\partial(a, \lambda, \mu)}. \quad (9)$$

Так как согласно теории Пуанкаре–Бендиксона область, ограниченная циклом при его бифуркации, содержит нулевую особую точку, то цикл пересекается с любым лучом, начинающемся в особой точке. Поэтому для определенности можно выбрать $a_0 = (1, 0)^T$. Тогда при выполнении соотношений (7) и (8) получим, что условие (9) примет вид

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2h_1 & 0 & 8\mu_0 d_2 & 0 \\ 2h_2 & 0 & 8\mu_0 d_1 & 8 \end{pmatrix} = 2. \quad (10)$$

Итак, при условиях (7), (8), (10) система (2) имеет малое 2π -периодическое решение $\bar{v} = v(\tau, a(\alpha), \lambda(\alpha), \mu(\alpha))$. Установим условие устойчивости этого решения.

Обозначим $g(v, \mu, \lambda) = (g_1(v, \mu, \lambda), g_2(v, \mu, \lambda))^T$ правую часть системы (2). По признаку Пуанкаре [5] для орбитальной асимптотической устойчивости периодического решения достаточно, чтобы при всех малых α выполнялось условие

$$\Delta(\alpha) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g_1(\bar{v}, \mu(\alpha), \lambda(\alpha))}{\partial v_1} + \frac{\partial g_2(\bar{v}, \mu(\alpha), \lambda(\alpha))}{\partial v_2} \right) dt < 0. \quad (11)$$

В данном случае при $a_0 = (1, 0)^T$ с учетом соотношения (7) имеем $\Delta(\alpha) = \pi\alpha^2(4\mu_0^2 d_2 + h_1) + o(\alpha^2) = -2\pi\alpha^2\mu_0^2 d_2 + o(\alpha^2)$. Значит, при

$$d_2 > 0 \tag{12}$$

выполняется условие (11). Из неравенства (12) следует, что при

$$h_1 = 3c_4 + c_2 < 0 \tag{13}$$

найдется величина μ_0^2 , удовлетворяющая соотношению (7). Подставив μ_0^2 в соотношение (8), получим λ_0 . Кроме того, в силу неравенства (13) выполняется условие (10).

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если выполняются условия (12), (13), то в системе (1) при

$$\mu = \mu(\alpha) = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)), \quad \mu_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{3c_4 + c_2}{d_2}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\mu}(\alpha) = 0$$

имеет место бифуркация рождения орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла, соответствующего решению $x(t, a(\alpha), \mu(\alpha))$ с начальным значением $a(\alpha) = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha))$, где $a_0 = (1, 0)^T$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{a}(\alpha) = 0_2$ и с периодом $(1 + \lambda(\alpha))2\pi$, где $\lambda(\alpha) = \alpha^2(\lambda_0 + \bar{\lambda}(\alpha))$, $\lambda_0 = -\left(\frac{\mu_0^2 d_1}{2} + \frac{3c_1 + c_3}{8}\right)$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{\lambda}(\alpha) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейсиг Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейсиг, Г. Сансоне, Р. Конти. М.: Мир, 1974. 318 с.
2. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. М.: Мир, 1980. 368 с.
3. Абрамов В.В. К проблеме устойчивости периодического решения в условиях бифуркации Хопфа / В.В. Абрамов, Е.Ю. Лискина, С.С. Мамонов // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3 (71). С. 78–91.
4. Терёхин М.Т. Малые периодические решения системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1. Рязань: Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина, 2020. С. 64–92.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

УДК 515.177

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

В работе построена формула, позволяющая вычислять спектральную последовательность биградуированных алгебр пространства когомологий касательного пучка супермногообразия (M, O) .

Ключевые слова: супермногообразие, спектральная последовательность, касательный пучок.

M. A. Bashkin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

ABOUT THE SPECTRAL SEQUENCE OF A SUPERMANIFOLD

In this paper we constructed the formula that allows to calculate the spectral sequence of bigraded algebras of the cohomology space of a tangent sheaf of a supermanifold (M, O) .

Keywords: supermanifold, spectral sequence, tangent sheaf.

В работе используются сведения о комплексных аналитических супермногообразиях (см. подробнее [1-3, 6]). Она является продолжением работ [4] и [5]. Основное поле здесь – это поле комплексных чисел \mathbb{C} .

Рассмотрим конструкцию спектральной последовательности когомологий касательного пучка T супермногообразия (M, O) размерности $m|n$ (см. [7]). Пусть U – штейново открытое покрытие многообразия M и $C^*(U, T) = \bigoplus_{q \geq 0} C^q(U, T)$ – соответствующий ему коцепный комплекс Чеха.

Тогда фильтрация пучка T приводит к фильтрации комплекса $C^*(U, T)$ подкомплексами $C_{(p)} = C^*(U, T_{(p)})$. Коммутатор векторных полей опреде-

ляет некоторую операцию $[,]$ в комплексе $C^*(U, T_{(p)})$ и в пространстве его когомологий $H^*(M, T)$, превращая последнее в градуированную супералгебру Ли (см. [5]).

Обозначим $H(M, T)_{(p)}$ образ отображения

$$H^*(M, T_{(p)}) \rightarrow H^*(M, T).$$

Тогда получим фильтрацию градуированной алгебры $H^*(M, T)$ градуированными подалгебрами $H^*(M, T_{(p)})$. Поэтому возникает ассоциированная биградуированная алгебра

$$\text{gr } H^*(M, T) = \bigoplus_{\substack{p=-1, \dots, n \\ q \geq 0}} \text{gr}_p H^q(M, T),$$

где

$$\text{gr}_p H^q(M, T) = H^q(M, T)_{(p)} / H^q(M, T)_{(p+1)}.$$

Согласно общей теореме Лере фильтрация комплекса $C^*(U, T)$ определяет спектральную последовательность биградуированных алгебр, сходящуюся к $E_\infty \cong \text{gr } H^*(M, T)$. Она строится следующим образом.

Для любого $p \geq -1$ и $r \geq 0$ определим векторное пространство $C_r^p = \{c \in C_{(p)} \mid dc \in C_{(p+r)}\}$. Тогда для каждого p

$$C_{(p)} = C_0^p \supset \dots \supset C_r^p \supset C_{r+1}^p \supset \dots$$

Определим r -тый член спектральной последовательности

$$E_r = \bigoplus_{p=-1}^n E_r^p, \quad r \geq 0, \quad \text{где } E_r^p = C_r^p / (C_{r-1}^{p+1} + dC_{r-1}^{p-r+1}).$$

Из определения C_r^p следует, что $d(C_r^p) \subset C_r^{p+r}$. Поэтому d индуцирует дифференцирование d_r на E_r степени r такое, что $d_r^2 = 0$. Кроме того, $E_{r+1} \cong H(E_r, d_r)$.

Для любого $q \in \mathbb{Z}$ определим пространства

$$E_r^{p,q} = C_r^{p,q} / (C_{r-1}^{p+1,q-1} + dC_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}),$$

где $C_r^{p,q} = C_r^p \cap C^{p+q}(U, T)$. Тогда $E_r = \bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}$. Имеем включение

$$d_r(E_r^{p,q}) \subset E_r^{p+r, q-r+1} \text{ для всех } r, p, q.$$

Пусть $Z_r = \text{Ker } d_r$. Тогда существует естественный гомоморфизм $\kappa_{r+1}^r: Z_r \rightarrow E_{r+1}$. Для всех $s > r$ можем также определить $\kappa_s^r = \kappa_s^{s-1} \circ \kappa_{s+1}^s \circ \dots \circ \kappa_{r+1}^r$ (хотя эта композиция не определена на всём Z_r). Можно доказать, что $\kappa_{r+1}^r: E_r^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}$ – изоморфизм для $\forall p$ и $r \geq q - m + 2$. Это позволяет определить предельную биградуированную супералгебру $E_\infty = \bigoplus_{p,q} E_\infty^{p,q}$.

Отметим следующее свойство спектральной последовательности (E_r) .

Предложение 1 (см. [7]). *Первые три члена спектральной последовательности (E_r) могут быть отождествлены со следующими биградуированными алгебрами: $E_0 = C^*(U, T_{gr})$, $E_1 = E_2 = H^*(M, T_{gr})$. Здесь $E_0^{p,q} = C^{p+q}(U, (T_{gr})_p)$, $E_1^{p,q} = E_2^{p,q} = H^{p+q}(M, (T_{gr})_p)$. Для любого $k \geq 0$ $d_{2k+1} = 0$ и, следовательно, $E_{2k+1} = E_{2k+2}$.*

Это свойство описывает первый шаг при построении спектральной последовательности для любого супермногообразия.

Предположим, что (M, O) соответствует классу когомологий γ коцикла $g = (g_{ij}) \in Z^1(U, \text{Aut}_{(2)} O_{gr})$, где $g_{ij} = h_i^{-1} h_j$. Через h_i обозначены изоморфизмы пучков $O_{gr} | U_i \rightarrow O | U_i$, индуцирующее тождественный изоморфизм $O_{gr} | U_i \rightarrow (\text{gr } O) | U_i$.

Определение. *Порядком супермногообразия (M, O) называется наибольшее из таких чисел $2k \geq 2$, что γ можно задать коциклом $g \in Z^1(U, \text{Aut}_{(2k)} O_{gr})$.*

Вместо γ можно рассматривать его образ во множестве $H^1(M, \text{Aut}_{(2k)} O_{gr})$, который будем обозначать той же буквой. Будем писать $g = \exp v$, где коцепь $v = (v_{ij}) \in C^1(U, (T_{gr})_{(2k)\bar{0}})$ определяется формулой $g_{ij} = \exp v_{ij}$.

Используя предложение 1, отождествим дифференциальные алгебры (E_0, d_0) и $(C^*(U, T_{gr}), d)$. Введем инъективные гомоморфизмы пучков $\psi_i: (T_{gr})_p | U_i \rightarrow T_{(p)} | U_i$, $\psi_i(v) = h_i^{-1} \circ v \circ h_i$. При этом $\psi_i: (T_{gr})_{(p)} | U_i = \bigoplus_{r \geq p} (T_{gr})_r | U_i \rightarrow T_{(p)} | U_i$ изоморфизмы пучков для любого i при $p \geq -1$. Отсюда определяется изоморфизм градуированных групп коцепей $\psi: C^*(U, T_{gr}) \rightarrow C^*(U, T)$, такой, что

$$\psi: C^*(U, (T_{gr})_{(p)}) \rightarrow C^*(U, T_{(p)}), \quad p \geq -1.$$

Он задается выражением $\psi(c)_{i_0 \dots i_q} = h_{i_0}^{-1} \circ c_{i_0 \dots i_q} \circ h_{i_0}$ для любого (i_0, \dots, i_q) , если $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q} \neq \emptyset$.

Для любого $c \in C^q(U, T_{gr}) = E_0^q$ справедливо

$$(\psi^{-1}(d\psi(c)))_{i_0 \dots i_{q+1}} = (d_0 c)_{i_0 \dots i_{q+1}} + \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} (ad u_{i_0 i_1})^l c_{i_1 \dots i_{q+1}}. \quad (1)$$

Это равенство позволяет вычислить спектральную последовательность (E_r) по известным d_0 и коцепи u .

Предложение 2 (см. [7]). *Предположим, что супермногообразие (M, O) имеет порядок $2k$ и что $\gamma \in H^1(M, \text{Aut}_{(2k)} O_{gr})$ – класс когомологий, определяющий супермногообразие (M, O) . Тогда $d_r = 0$ для $r=1, \dots, 2k-1$ и $d_{2k} = \text{ad } \lambda_{2k}(\gamma)$.*

Теорема. *При выполнении условий предложения 2 имеем*

$$d_{2k+2}(\kappa_{2k+2}^0 c)_{i_0 \dots i_q} = \kappa_{2k+2}^0 ([u_{i_0 i_1}^{2k+2}, c_{i_1 \dots i_q}] + \frac{1}{2} [u_{i_0 i_1}^{2k}, [u_{i_0 i_1}^{2k}, c_{i_1 \dots i_q}]]), \quad (2)$$

где $c \in E_0^{p, q-p} = H^q(U, T_{gr})$, $u = u^{2k} + u^{2k+2} + \dots$, $u^{2l} \in C^1(U, (T_{gr})_{2l})$.

Доказательство. Пусть $c \in E_0^{p, q-p}$, $d_0 c = 0$. Обозначим через z его класс когомологий в $E_1^{p, q-p}$. Очевидно, что c и z представляются коцепью $\psi(c) \in C_0^p$. Из (1) имеем

$$(\psi^{-1}(d\psi(c)))_{i_0 \dots i_{q+1}} = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} (ad u_{i_0 i_1})^l c_{i_1 \dots i_{q+1}}.$$

Отсюда получаем

$$(\psi^{-1}(d\psi(c)))_{i_0 \dots i_{q+1}} = [u_{i_0 i_1}^{2k}, c_{i_1 \dots i_{q+1}}] + \left([u_{i_0 i_1}^{2k+2}, c_{i_1 \dots i_{q+1}}] + \frac{1}{2} [u_{i_0 i_1}^{2k}, [u_{i_0 i_1}^{2k}, c_{i_1 \dots i_q}]] \right) + w_{i_0 \dots i_{q+1}},$$

где $w_{i_0 \dots i_{q+1}} \in C_{(2k+1)}$. Следовательно, dz представляется коцепью

$$\psi \left([u^{2k}, c] + \left([u^{2k+2}, c] + \frac{1}{2} [u^{2k}, [u^{2k}, c]] \right) + w \right).$$

Согласно предложению 2, имеем $d_1 = d_2 = \dots = d_{2k-1} = 0$, а $d_{2k}z$ представляется коцепью $\psi([u^{2k+2}, c])$. По построению спектральной последовательности $d_{2k+1} = 0$. Тогда $d_{2k+2}z$ представляется коцепью

$$\psi \left([u^{2k+2}, c] + \frac{1}{2} [u^{2k}, [u^{2k}, c]] \right).$$

Отсюда и следует искомая формула (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Однородные и четно-однородные супермногообразия с ретрактом $CP_{kk20}^{||4}$ при $k \geq 2$ // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 14–21.
2. *Башкин М.А.* Четно-однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $CP_{k+1k31}^{||4}$ при $k \geq 3$ // Ярослав. пед. вестник. 2010. Т. 3, № 1. С. 37–41.
3. *Башкин М.А.* Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вестник Рыбинской гос. авиац. технол. акад. им. П.А.Соловьева. 2015. № 3(34). С. 125–129.
4. *Башкин М.А.* Однородные нерасщепимые супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 3–5.
5. *Onishchik A.L.* Non-Abelian Cohomology and Supermanifolds. SFB 288. Preprint № 360. Berlin, 1998. С.1–38.
6. *Onishchik A.L.* Lifting of holomorphic actions on complex supermanifolds // Lie Groups, Geometric Structures and Differential Geometry / Adv. Studies in Pure Math. 37. Kyoto, 2002. P.317–335.
7. *Onishchik A.L.* A spectral sequence for the tangent sheaf cohomology of a supermanifold // Lie groups and Lie algebras. Kluwer. Dordrecht, 1998. P. 199–215.

УДК 514.76

А. В. Букушева

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
Россия, г. Саратов, *e-mail: bukusheva@list.ru*

О ГЕОМЕТРИИ НЕГОЛОНОМНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ

*Доказывается, что неголономное многообразие Кенмоцу не может быть
оснащено структурой η -Эйнштейнова многообразия.*

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связь-
ность, тензор Схоутена, η -Эйнштейново многообразие.

A. V. Bukusheva

G. N. Chernyshevsky National Research Saratov State University,
Russia, Saratov, *e-mail: bukusheva@list.ru*

ON THE GEOMETRY OF NONHOLONOMIC KENMOTSU MANIFOLDS

*It is proved that a nonholonomic Kenmotsu manifold cannot be equipped with
the structure of an η -Einstein manifold.*

Keywords: nonholonomic Kenmotsu manifold, intrinsic connection, Schouten
tensor, η -Einstein manifold.

Введение. Понятие неголономного многообразия Кенмоцу введено автором в работе [1]. Неголономное многообразие Кенмоцу является обобщением почти контактного метрического многообразия Кенмоцу и сохраняет те его свойства, которые не зависят от интегрируемости соответствующего распределения [2, 3].

Почти контактное метрическое многообразие называется η -Эйнштейновым многообразием, если выполняется условие $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$, где \tilde{r} – тензор Риччи, a и b – гладкие функции. Хорошо известно, что если в случае многообразия Кенмоцу $b = \text{const}$, то η -Эйнштейново многообразие Кенмоцу является многообразием Эйнштейна. В настоящей работе показывается, что неголономное многообразие Кенмоцу не может нести на себе структуру η -Эйнштейнова многообразия.

1. Основные сведения из геометрии неголономных многообразий Кенмоцу. Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n=2m+1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [4]. Здесь, в частности, η – 1-форма и $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающие, соответственно, распределение $D: D = \ker(\eta)$ и оснащение D^\perp распределения $D: D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ .

Нормальное почти контактное метрическое многообразие M с инволютивным распределением D называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Для проведения необходимых вычислений удобно использовать так называемые адаптированные координаты. Карта $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M называется адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [5]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_\alpha) = \vec{e}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma_\alpha^n \partial_n$ порождают распределение $D: D = \text{span}(\vec{e}_\alpha)$. Для неголономного поля базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$. Из условия $\vec{\xi} \in \ker \omega$ следует, что $\partial_n \Gamma_\alpha^n = 0$. Пусть $k(x^\alpha)$ и $k'(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^\alpha = x^{\alpha'}(x^{\alpha'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'}).$$

Используя равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, получаем в адаптированных координатах равенство $\partial_n g_{ab} = 2g_{ab}$.

Пусть $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$ – внутренняя линейная связность на многообразии с контактной метрической структурой [6]. Связность ∇ используется для задания параллельного переноса допустимых векторов вдоль допустимых кривых. Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$.

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора $g: \vec{\nabla}, \vec{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$.

Пусть $\psi: D \rightarrow D$ – эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\psi\vec{x}, \vec{y})$. Имеют место следующие предложения [7].

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид $\tilde{F}_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{ad}(\tilde{e}_b g_{cd} + \tilde{e}_c g_{bd} - \tilde{e}_{bc})$, $\tilde{F}_{ab}^n = \omega_{ba} - g_{ab}$, $\tilde{F}_{an}^b = \tilde{F}_{na}^b = \delta_a^b + \psi_a^b$, $\tilde{F}_{na}^n = \tilde{F}_{nn}^a = 0$.

Предложение 2. Почти контактное метрическое многообразие является неголономным многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{x}}\varphi)\tilde{y} = \eta(\tilde{y})F\tilde{x} - (\omega(\tilde{x}, \varphi\tilde{y}) - g(\tilde{x}, \varphi\tilde{y}))\tilde{\xi},$$

где $F = -\varphi - \psi \circ \varphi$.

Рассмотрим ниже пример неголономного многообразия Кенмоцу.

Пусть $M = R^3$. (∂_α) ($\alpha = 1, 2, 3$) – стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η , полагая, $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Пусть, далее $\tilde{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$, $\tilde{e}_2 = \partial_2$, $\tilde{e}_3 = \partial_3$, $D = \text{span}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$. Определим метрический тензор, полагая $g(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) = g(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) = e^{2x^3}$, $g(\tilde{e}_3, \tilde{e}_3) = 1$. Тем самым добиваемся выполнения равенства $L_{\tilde{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Структурный эндоморфизм зададим равенствами $\varphi(\tilde{e}_1) = \tilde{e}_2$, $\varphi(\tilde{e}_2) = -\tilde{e}_1$, $\varphi(\tilde{e}_3) = \tilde{0}$.

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\tilde{\xi}}\varphi = 0$ и

$$\omega(\varphi(\tilde{e}_1), \varphi(\tilde{e}_2)) = -\omega(\tilde{e}_2, \tilde{e}_1) = \omega(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2).$$

Последнее означает выполнение равенства $\omega(\varphi\tilde{x}, \varphi\tilde{y}) = \omega(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами связности Леви-Чивита являются следующие коэффициенты: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -x^2$. Таким образом, $\nabla\varphi = 0$.

2. Основные результаты. Пусть M – неголономное многообразие Кенмоцу. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Неголономное многообразие Кенмоцу не может нести на себе структуру η -Эйнштейнова многообразия.

Доказательство. Найдем в адаптированных координатах необходимые для дальнейшего компоненты тензора кривизны \tilde{R} связности Леви – Чивита. Имеем:

$$\tilde{R}_{abc}^d = R_{abc}^d + (\delta_a^d + \psi_a^d)(\omega_{cb} - g_{cb}) - (\delta_b^d + \psi_b^d)(\omega_{ca} - g_{ca}) - 2\omega_{ba}(\delta_c^d + \psi_c^d),$$

$$\tilde{R}_{anc}^n = g_{ca} + \omega_{da}\psi_c^d,$$

$$\tilde{R}_{nba}^c = -\nabla_b\psi_a^c.$$

Здесь R_{abc}^d - компоненты тензора Схоутена:

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}], \quad Q = 1 - P.$$

Пусть, теперь, $\tilde{r}(\vec{x}, \vec{y})$ – тензор Риччи, $r(\vec{x}, \vec{z}) = \text{tr}(\vec{y} \rightarrow R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z})$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ – тензор Схоутена-Риччи [7].

В адаптированных координатах получаем:

$$\tilde{r}_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ca} - 2m\omega_{ca} + \omega_{cd}\psi_a^d + \omega_{ad}\psi_c^d,$$

$$\tilde{r}_{an} = \tilde{r}_{na} = -\nabla_b\psi_a^c,$$

$$\tilde{r}_{nn} = 2m + \text{tr}\psi^2.$$

Предположим, что неголономное многообразие Кенмоцу является η -Эйнштейновым многообразием. Тогда выполняется следующее равенство:

$$r_{ac} + (2m + a)g_{ca} - 2m\omega_{ca} + \omega_{cd}\psi_a^d + \omega_{ad}\psi_c^d = 2m\omega_{ca}.$$

Левая часть последнего равенства симметрична по индексам a, b , правая – кососимметрична, что и доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букушева А.В. О тензоре Схоутена – Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15-19.
2. Букушева А.В. Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2020. №64. С. 5-14.
3. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
4. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №2. С. 138-147.
5. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258-263.
6. Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22, №1. С. 25-34.
7. Букушева А.В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. №48. С. 32-41.

УДК 514.76

С. В. Галаев

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, *e-mail*: sgalaev@mail.ru

О КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИМ КРУЧЕНИЕМ НА СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

На субримановом многообразии M контактного типа рассматривается N -связность ∇^N , определяемая парой (∇, N) , где ∇ - внутренняя метрическая связность, N - эндоморфизм касательного расслоения такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Изучаются свойства многообразия M для случая, когда $N = 2\psi$, где эндоморфизм ψ однозначно задается равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. При этом дополнительно предполагается, что $\nabla\omega = 0$.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, внутренняя связность, каноническая связность с параллельным кососимметрическим кручением.

S. V. Galaev

G. N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, *e-mail*: sgalaev@mail.ru

ABOUT CANONICAL CONNECTION WITH PARALLEL SKEW-SYMMETRIC TORSION ON SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS

The paper is devoted to the study of N -connections ∇^N on sub-Riemannian manifolds M of contact type. An N -connection is defined by a pair (∇, N) , where ∇ is an interior metric connection, N is an endomorphism of the tangent bundle such that $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. The properties of a manifold M satisfying $N = 2\psi$, where the endomorphism ψ is uniquely given by the equality $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$, are studied. It is assumed that $\nabla\omega = 0$.

Keywords: sub-Riemannian manifold of contact type, interior connection, canonical connection with parallel skew-symmetric torsion.

Введение. Метрические связности с кручением на римановых многообразиях являются в последнее время предметом активного изучения [1-3]. Такие связности находят применения в теоретической физике. Помимо

связности Леви-Чивита, которая по очевидным причинам является центральным объектом в римановой геометрии, следующим наиболее естественным классом для рассмотрения является класс метрических связностей с кососимметрическим и параллельным кручением. Эти связности имеют те же геодезические, что и связность Леви-Чивита [1]. Более того тензор кривизны таких связностей парно симметричен и удовлетворяет второму тождеству Бьянки. Существует несколько важных примеров геометрических пространств, допускающих метрические связности с параллельным кососимметрическим кручением. К пространствам такого типа относятся многообразия Сасаки [1]. В настоящей работе мы изучаем метрические связности с параллельным кососимметрическим кручением, заданные на более широком классе пространств – субримановых многообразиях контактного типа. Субримановы многообразия контактного типа оснащены субримановой структурой (M, ξ, η, g) , где η и ξ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . Более точно, нас интересует строение внутренних инвариантов субримановых многообразий, являющихся дополнительно многообразиями Эйнштейна по отношению к связности с кососимметрическим кручением.

На субримановом многообразии M нами рассматривается N -связность ∇^N , определяемая парой (∇, N) , где ∇ – внутренняя метрическая связность, $N: TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\xi = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Кручение изучаемой нами N -связности, представленное трехвалентным ковариантным тензором, кососимметрично. Такая связность определена однозначно и отвечает эндоморфизму $N = 2\psi$, где эндоморфизм ψ задается равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Для случая $N = 2\psi$ находятся условия, при которых субримановы многообразия являются Эйнштейновыми многообразиями. Среди внутренних инвариантов субримановых многообразий особое место занимает тензор, названный нами тензором Риччи – Вагнера. По-видимому, Вагнер первым использовал этот объект при изучении геометрии неголономных многообразий ко-размерности 1 [4]. Мы доказываем, что субриманово многообразие контактного типа является многообразием Эйнштейна относительно метрической связности с кососимметрическим и параллельным кручением тогда и только тогда, когда тензор Риччи – Вагнера указанной связности имеет специальное строение.

1. Основные сведения об N -связности с кососимметрическим и параллельным кручением

Рассмотрим гладкое многообразие M размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ с заданной на нем субримановой структурой (M, ξ, η, g, D) , где η и

$\xi^{\vec{}}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^{\perp} . Для проведения вычислений полезно использовать так называемые адаптированные координаты.

Пусть $k(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n - 1$) – карта многообразия M , адаптированная к распределению D [5, 6]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, где $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, порождают систему $D: D = \text{span}(\vec{e}_a)$. В дальнейшем будем работать с неголономным полем базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующим ему полем кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ – ее коэффициенты. Имеют место следующие предложения [3]:

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^n = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$, $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$,
 $C_a^b = g^{bc}C_{ac}$.

Предложение 2. Пусть $N: TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения субриманова многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(X, Y)$, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1) $S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX, X, Y \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_X^N Y = \nabla_X Y, X, Y \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}, X \in \Gamma(TM)$.

Положим $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z), X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X, Y, Z)$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) &= 2\omega_{ab}, \\ \tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) &= -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b), \\ \tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) &= g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b). \end{aligned}$$

Тензор $\tilde{S}(X, Y, Z)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$. Тем самым, справедлива следующая теорема [3].

Теорема 1. Линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$.

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $N = 2\psi$.

В работе [3] автором настоящей статьи были доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда $L_{\vec{x}}g = 0$.*

Теорема 3. *Кручение кососимметрической линейной связности ∇^N , заданной на субримановом многообразии M , параллельно тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, где ∇ – внутренняя метрическая связность.*

Внутренняя связность ∇ [5, 6] на субримановом многообразии определяется как отображение $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1X+f_2Y} = f_1\nabla_X + f_2\nabla_Y$,
- 2) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
- 3) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

2. Субримановы многообразия, являющиеся многообразиями Эйнштейна относительно метрической связности с параллельным кососимметрическим кручением.

Пусть $K(X, Y)Z, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, тензор кривизны метрической связности с параллельным кососимметрическим кручением ∇^N . Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(X, Y)Z$. Имеем:

$$\begin{aligned} K_{abc}^d &= R_{abc}^d + 4\omega_{ab}\psi_c^d, \\ K_{anc}^d &= \nabla_a N_c^d. \end{aligned}$$

Здесь $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d\Gamma_{b]c}^e$ – компоненты тензора кривизны Схоутена [2], определяемого равенством

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y \vec{z} - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X, Y]} Z - P[Q[X, Y], Z], \quad Q = 1 - P.$$

Инвариантное представление тензора $K(X, Y)\vec{z}$ имеет вид

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \eta(Y)(\nabla_X N)Z - \eta(X)(\nabla_Y N)Z + 4\omega(X, Y)\psi(Z), \\ X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Тензорное поле $r(X, Z) = \text{tr}(Y \rightarrow R(X, Y)Z, X, Y, Z \in \Gamma(D)$ будем называть тензором Риччи – Вагнера.

Используя адаптированные координаты, выпишем компоненты тензора Риччи $k(X, Y)$ связности ∇^N :

$$\begin{aligned} k_{ab} &= r_{ab} + 4\omega_{ad}\psi_b^d, \\ k_{an} &= k_{nn} = 0, \\ k_{na} &= -\nabla_a \psi_a^d. \end{aligned}$$

Из определения эндоморфизма ψ следует, что равенство $\nabla\omega = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\nabla\psi = 0$. Таким образом, компоненты тензора Риччи $k(X, Y)$ связности ∇^N принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} k_{ab} &= r_{ab} + 4\omega_{ad}\psi_b^d, \\ k_{an} &= k_{na} = k_{nn} = 0. \end{aligned}$$

Тем самым, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 4. *Субриманово многообразие контактного типа является многообразием Эйнштейна относительно связности с параллельным кососимметрическим кручением тогда и только тогда, когда*

$$r_{ab} = 4\omega_{da}\psi_b^d.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agricola I.* Einstein manifolds with skew torsion / I. Agricola, A.C. Ferreira // Quart. J. Math., 2014. №65. P. 717-741.
2. *Галаев С.В.* Связности с параллельным кососимметрическим кручением на субримановых многообразиях // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2020. №51. С. 58-67.
3. *Галаев С.В.* О геометрии субримановых η -Эйнштейновых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2019. №50. С. 68-81.
4. *Вагнер В.В.* Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173-255.
5. *Букушева А.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. №48. С. 32-41.
6. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с ϕ -связностью // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. №17(214). С. 20-24.

УДК 519.64

А. Д. Гербер

Тюменское высшее военно-инженерное училище
им. маршала инженерных войск им. А.И. Прошлякова
Россия, г. Тюмень, e-mail: gerber_a@mail.ru

**ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ПРИБЛИЖЕННОГО
ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА,
ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДРОБНОЙ
ПРОИЗВОДНОЙ**

В работе представлены результаты исследования, связанного с изучением алгоритмов приближенного вычисления несобственных интегралов, определяющих значения дробной производной для произвольной функции. Показано, что использование квадратур типа Гаусса-Кристоффеля позволяет решить задачу по определению ее значений с заранее заданной погрешностью.

***Ключевые слова:** несобственный интеграл, дробная производная произвольной функции, квадратура типа Гаусса-Кристоффеля.*

A. D. Gerber

Marshal A.I. Proshlyakov of Engineering Troops
Tyumen Higher Military Engineering School
Russia, Tyumen, e-mail: gerber_a@mail.ru

**DESCRIPTION OF ALGORITHM FOR THE APPROXIMATE
CALCULATION OF THE IMPROPER INTEGRAL,
DETERMINING VALUES OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE**

The paper presents the results of research related to the study of algorithms for the approximate calculation of improper integrals that determine the values of the fractional derivative for an arbitrary function. It is shown that the use of Gauss-Christoffel quadratures allows solving the problem of determining values with a predetermined error.

***Keywords:** improper integral, fractional derivative of an arbitrary function, Gauss-Christoffel quadrature.*

В появляющихся в последнее время прикладных задачах, связанных с вычислением значения дробной производной, возникают ситуации, когда, интегралы, входящие в выражение для дробной производной, оказываются неберущимися. Поскольку в роли порядка дифференцирования α в этом случае может выступать любое действительное число [1–4], то алгоритм приближенного вычисления такого рода интегралов должен учитывать данное обстоятельство. Можно выделить два, наиболее часто исполь-

зуемых варианта, определяющих выражение для дробной производной [3, с.13]. В частности, это дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто–Герасимова, которые задаются следующими выражениями (в порядке перечисления):

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(z) dz}{(x-z)^{\alpha}},$$

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{(x-z)^{\alpha}}, \quad (1)$$

где Γ – стандартное обозначение Гамма-функции, $0 < \alpha < 1$, а d/dx – обозначение классического оператора дифференцирования в нотации Эйлера.

В первом варианте определения дробной производной процедура обычного дифференцирования применяется после взятия интеграла, во втором, она применяется до его взятия. Однако и в том и в другом варианте определения дробной производной в определенном интеграле всегда присутствует функция, превращающая его в сингулярный интеграл. Обычные правила приближенного вычисления значений определенных интегралов, построенные на основе разбиения отрезка интегрирования на одинаковые части, оказываются неприменимыми. Таким образом, возникает ситуация, когда предпочтительным вариантом является использование квадратурных формул, позволяющих обойти особенность, связанную с наличием бесконечного значения подынтегральной функции.

Работа посвящена анализу имеющихся квадратурных формул и построению новых, применимых к вычислению сингулярного интеграла, обобщающего оба определения дробной производной, с учетом того, что дифференцирование по обычным правилам не приводит в данном случае к появлению других особенностей. Таким образом, вычисление значения дробной производной, с точностью до множителя, совпадает с задачей отыскания значения следующего интеграла:

$$\tilde{I} = \int_0^x \frac{\varphi(z) dz}{(x-z)^{\alpha}} = \left| y = x - z \right| = \int_0^x \frac{\varphi(x-y) dy}{y^{\alpha}}. \quad (2)$$

Заменой переменной интегрирования, приведем его к стандартному симметричному отрезку интегрирования [-1;1]:

$$\tilde{I} = \int_0^x \frac{\varphi(x-y) dy}{y^{\alpha}} = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x}{2}(1+t); \\ \omega(t, x) = \varphi\left(\frac{x}{2}(1-t)\right) \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t, x) dt}{(1+t)^{\alpha}} = I \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\alpha}. \quad (3)$$

Все сравниваемые ниже квадратурные методы определяются следующей квадратурной формулой Гаусса-Кристоффеля [5, с. 487; 7, с. 3]:

$$I = \int_{-1}^1 \rho(t) \omega(t, x) dt = \sum_{k=1}^n C_k \omega(t_k, x) + r_n, \quad (4)$$

где $\rho(t) = 1/(1+t)^\alpha$ – весовая функция; C_k – весовые коэффициенты; t_k – узлы; r_n – величина алгебраической точности квадратурной формулы; n – равно числу узлов и порядку ортогонального полинома квадратурной формулы; ω – подынтегральная функция. Далее значение переменной x , выступающей в роли параметра, будет опущено, так как ее учет на данном этапе не влияет ни на вид особенности, ни на значения узлов квадратуры. Как правило, весовая функция, веса и узлы такой квадратурной формулы определяются из соображений получения точного значения для полиномов определенного порядка. Оказалось, что корни семейства ортогональных полиномов, построенных для данного отрезка, гарантирует точное значение определенного интеграла для полиномов, степень которых не выше, чем $2n-1$, где n – порядок используемого полинома. Анализ популярных монографий на тему, связанную с построением квадратурных формул, показал, что такой вариант сингулярности детально, с указанием узлов и весов к ним, в них не обсуждается (Вержбицкий В.М. [5], Крылов В.И. [6]). Поэтому становится актуальной задача, связанная с построением квадратурной формулы для интегралов этого типа. Ее решение, в свою очередь, предполагает построение ортогонального с весовой функцией на отрезке полинома $P_n(t)$ заданной степени n , определение значений узлов (корней ортогонального полинома) и весов их учета в варианте формулы (4). Условие ортогональности

$$\int_{-1}^1 \rho(t) P_n(t) P_j(t) dt = 0, \quad j \leq n-1 \quad (5)$$

эквивалентно [7, с. 4] следующему более простому условию

$$\int_{-1}^1 \rho(t) P_n(t) t^j dt = 0; \quad j \leq n-1. \quad (6)$$

Рассмотрим процедуру отыскания вышеупомянутых значений узлов и весов, в общем виде, для квадратурного полинома первого и второго порядка. Приведем последовательность действий для квадратурного ортогонального полинома первого порядка:

$$P_1(t) = t + S_0; \quad \int_{-1}^1 \frac{(t + S_0)}{(1+t)^\alpha} dt = 0; \quad \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} + (S_0 - 1) \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0; \quad (7)$$

$$S_0 = \frac{\alpha}{2-\alpha}; \quad t_1 = -\frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

Так как, вид полинома и значение узла стали известны, то весовой коэффициент квадратурной формулы теперь можно найти по формуле из [7]:

$$C_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(t) dt}{(1+t)^\alpha (t-t_k) P_n'(t_k)}$$

Получаем

$$C_1 = \int_{-1}^1 \frac{(t + \frac{\alpha}{2-\alpha}) dt}{(1+t)^\alpha (t + \frac{\alpha}{2-\alpha}) \cdot 1} = \frac{(1+t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{-1}^1 = \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (8)$$

Аналогичные выкладки для ортогонального на этом отрезке полинома второго порядка, привели к следующим выражениям:

$$P_2(t) = t^2 + S_1 t + S_0 \rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 + S_1 t + S_0) dt}{(1+t)^\alpha} = 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{(t^2 + S_1 t + S_0) t dt}{(1+t)^\alpha} = 0 \end{cases} \dots \quad (9)$$

$$\begin{cases} S_0 = -\frac{4-\alpha-\alpha^2}{(-4+\alpha)(-3+\alpha)} \\ S_1 = -\frac{2\alpha}{-4+\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-3\alpha+\alpha^2-2\sqrt{2}\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2}}{12-7\alpha+\alpha^2} \\ t_2 = \frac{-3\alpha+\alpha^2+2\sqrt{2}\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2}}{12-7\alpha+\alpha^2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{2^{1-\alpha}(\sqrt{2}(-3\alpha+\alpha^2)+(4-2\alpha)\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2})}{(-2+\alpha)(-1+\alpha)\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2}} \\ C_2 = \frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}(\alpha^2-2\sqrt{2}\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2}+\alpha(-3+\sqrt{2}\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2}))}{(-2+\alpha)(-1+\alpha)\sqrt{6-5\alpha+\alpha^2}} \end{cases}$$

Для получения выражений для коэффициентов квадратурных ортогональных полиномов более высокой степени был использован пакет символьной математики Wolfram Mathematica 7 for Student. В табл. 1 приведены найденные выражения для коэффициентов всех таких полиномов

$$P_n(t) = S_{n0} + S_{n1}t + S_{n2}t^2 + \dots + S_{n,n-2}t^{n-2} + S_{n,n-1}t^{n-1} + t^n \quad (10)$$

степени n от 1 до 5.

Таблица 1. Значения коэффициентов ортогонального полинома квадратурной формулы Гаусса-Кристоффеля

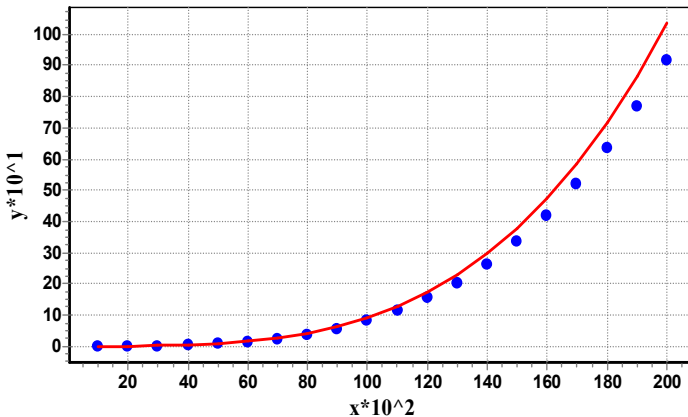
τ	S_{n_0}
1	$-1 - \frac{2}{-2 + \alpha}$
2	$1 + \frac{16}{-4 + \alpha} - \frac{8}{-3 + \alpha}$
3	$-1 - \frac{114}{-6 + \alpha} + \frac{120}{-5 + \alpha} - \frac{24}{-4 + \alpha}$
4	$1 + \frac{768}{-8 + \alpha} - \frac{1248}{-7 + \alpha} + \frac{576}{-6 + \alpha} - \frac{64}{-5 + \alpha}$
5	$-1 - \frac{5010}{-10 + \alpha} + \frac{11040}{-9 + \alpha} - \frac{8160}{-8 + \alpha} + \frac{2240}{-7 + \alpha} - \frac{160}{-6 + \alpha}$
n	S_{n_1}
2	$2 \left(-1 - \frac{4}{-4 + \alpha} \right)$
3	$3 \left(1 + \frac{36}{-6 + \alpha} - \frac{24}{-5 + \alpha} \right)$
4	$4 \left(-1 - \frac{264}{-8 + \alpha} + \frac{336}{-7 + \alpha} - \frac{96}{-6 + \alpha} \right)$
5	$5 \left(1 + \frac{1800}{-10 + \alpha} - \frac{3360}{-9 + \alpha} + \frac{1920}{-8 + \alpha} - \frac{320}{-7 + \alpha} \right)$
n	S_{n_2}
3	$3 \left(-1 - \frac{6}{-6 + \alpha} \right)$
4	$6 \left(1 + \frac{64}{-8 + \alpha} - \frac{48}{-7 + \alpha} \right)$
5	$10 \left(-1 - \frac{510}{-10 + \alpha} + \frac{720}{-9 + \alpha} - \frac{240}{-8 + \alpha} \right)$
n	S_{n_3}
4	$4 \left(-1 - \frac{8}{-8 + \alpha} \right)$
5	$10 \left(1 + \frac{100}{-10 + \alpha} - \frac{80}{-9 + \alpha} \right)$
n	S_{n_4}
5	$5 \left(-1 - \frac{10}{-10 + \alpha} \right)$

Приведем результаты численного моделирования, связанные с использованием традиционных квадратурных формул и формул, приведенных выше. Для проведения такого анализа был использован следующий тестовый пример:

$$I_{\alpha}^3(x) = \int_0^x \frac{z^3 dz}{(z-x)^{\alpha}} = x^{4-\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{3}{2-\alpha} + \frac{3}{3-\alpha} - \frac{1}{4-\alpha} \right). \quad (11)$$

Численный эксперимент поводился с помощью программы, реализованной в среде объектно-ориентированного программирования Delphi 7.

На первом этапе анализировались возможности формул, связанных с квадратурами Гаусса и практически аналогичным им квадратурами Чебышева, для вычисления $I_{0,5}^3(x)$. Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1. Оказалось, что ростом числа узлов точность счета тестового интеграла возрастает, практически, прямо пропорционально числу узлов. Например, для 8-ми узлов она составила примерно 11%, а для 16-ти узлов – примерно 6%.



MaxEps в % = 11,263 Красная линия - теория. Точки - расчет.

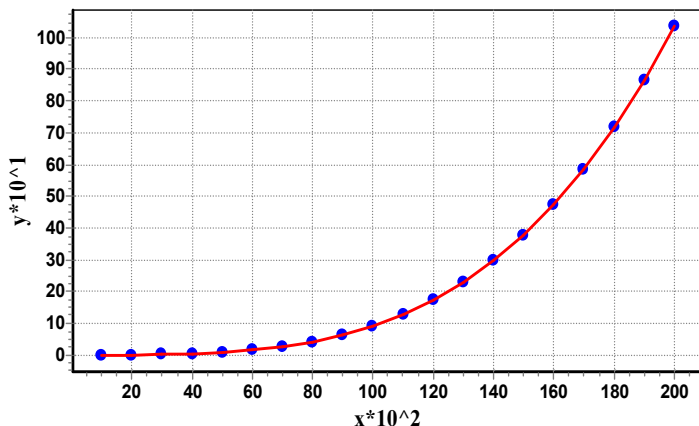
Рис. 1. Линия точное значение интеграла, точки – вычисленные с помощью квадратурных формул Гаусса

Вариант квадратуры Чебышева дал примерно ту же погрешность расчета, что и квадратура Гаусса. Таким образом, вычисление значения сингулярного интеграла без использования весовой функции вида

$\rho(t) = 1/(1+t)^\alpha$ не дает особого выигрыша в уменьшении погрешности даже с увеличением числа узлов квадратурной формулы.

На втором этапе интеграл $I_{0,5}^3(x)$ был вычислен на основе использования формул (7) – (9). При использовании всего лишь двухточечной квадратуры по формулам (9) вычисления показали, что абсолютная ошибка в его значении составила величину порядка 10^{-14} , то есть оказалась равной машинной точности данных в формате Real. Кроме того, полученный результат показал, что он совпадает с теоретически предсказанным результатом, который гарантирует точное значение интеграла для полиномов со степенью не выше $2n-1$ (в нашем случае $2n-1=3$), где n равен степени квадратурного полинома. Детали численного эксперимента для кубической функции представлены на рис. 2.

Численный эксперимент с использованием все той же двухточечной квадратуры дал ошибку для $I_{0,5}^4(x)$ примерно в 2%.



MaxErrs в % = 0 Красная линия - теория. Точки - расчет.

Рис. 2. Истинное значение интеграла (11) – линия и его приближенное значение на основе (9) – точки, полученные в результате численного эксперимента

Понятно, что чем выше степень ортогонального полинома, тем более точен результат вычислений значений дробной производной. Таким образом, возникает смысл в получении квадратурных формул для более высоких степеней квадратурного полинома.

Опишем методику численного построения ортогональных полиномов на отрезке $[-1;1]$ полиномов с весом $\rho(t) = 1/(1+t)^\alpha$. Воспользуемся следующим обозначением (показатель степени α далее будет опущен) для используемого далее несобственного интеграла с известным значением:

$$I_k = \int_{-1}^1 \frac{t^k dt}{(1+t)^\alpha} = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \frac{2^{k+1-j-\alpha}}{k+1-j+\alpha}; \quad k = 0,1,2,\dots \quad (12)$$

где выражение C_k^j использовано для обозначения биномиальных коэффициентов. Значения коэффициентов ортогонального полинома в виде (10) получаются за счет выполнения условий ортогональности (6) и являются решениями системы линейных алгебраических уравнений относительно S_{nj} , расширенная матрица которой имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} I_0 & I_1 & I_2 & \dots & I_{n-2} & I_{n-1} & -I_n \\ I_1 & I_2 & I_3 & \dots & I_{n-1} & I_n & -I_{n+1} \\ & & & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ I_{n-1} & I_n & I_{n+1} & \dots & I_{2n-3} & I_{2n-2} & -I_{2n-1} \end{array} \right). \quad (13)$$

Здесь n – порядок ортогонального полинома. После того, как стали известны коэффициенты S_{nj} ортогонального полинома, можно найти, любым численным способом с заданной точностью, все его n корней t_k , $k = 1,2,\dots,n$, лежащих внутри интервала $(-1;1)$. Знание корней ортогонального полинома, позволяет найти и веса квадратурной формулы на основе решения системы линейных уравнений, построенной с использованием методики неопределенных коэффициентов. В частности, квадратурная формула Гаусса–Кристоффеля предполагает справедливость следующего соотношения:

$$I_k = \int_{-1}^1 \frac{t^k dt}{(1+t)^\alpha} = \sum_{j=1}^n C_j t_j^k; \quad k = 0,1,\dots,n-1. \quad (14)$$

Последнее обстоятельство и позволяет построить следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных весов C_j , $j = 1,2,\dots,n$, квадратурной формулы заданного порядка. Расширенная матрица этой системы уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & I_0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_{n-1} & t_n & I_1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \dots & t_{n-1}^2 & t_n^2 & I_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \dots & t_{n-1}^{n-1} & t_n^{n-1} & I_{n-1} \end{array} \right). \quad (15)$$

Таким образом, для любого показателя порядка дробной производной α и заданного номера квадратурного полинома n становится известным набор узлов t_j и весовых коэффициентов C_j квадратурной формулы, позволяющей вычислить значение дробной производной с предполагаемой точностью. Последнее означает, что порядок используемой квадратурной можно выбирать заранее, ориентируясь на правила, которые гарантируют точное (в пределах машинной погрешности) значение дробной производной.

Процедура вычисления исходного интеграла теперь имеет вид

$$\int_0^x \frac{\varphi(z) dz}{(x-z)^\alpha} = \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{-1}^1 \frac{\varphi\left(\frac{x}{2}(1-t)\right) dt}{(1+t)^\alpha} = \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\alpha} \sum_{j=1}^n C_j \varphi\left(\frac{x}{2}(1-t_j)\right). \quad (16)$$

Выводы. В работе показано, что использование классических квадратурных формул для приближенного вычисления значений дробных производных приводит к наличию значительной погрешности в полученных результатах.

Использование квадратур, построенных по методике Гаусса-Кристоффеля с учетом весовой подынтегральной функции, позволяет заметно повысить точность получаемых приближенных значений дробной производной. Более того, повышение степени квадратурного полинома может гарантировать заданную погрешность ее значений.

Так как получение выражений для коэффициентов ортогонального полинома, при условии произвольного показателя порядка дробной производной, является в общем виде сложной задачей, то в работе предложена и описана методика численного подхода к решению поставленной задачи по его построению. Задавая любое значение порядка квадратурного (ортогонального) полинома и значение порядка дробной производной, вышеописанный алгоритм гарантирует получение значений величин узлов и весов к ним.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Килбас А.А.* Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка: Курс лекций // Междунар. методологическая школа-конференция, посвященная 40-летию возрождения Самарского государственного университета (Самара, 5 октября – 6 ноября 2009 года) ”Математическая физика и нанотехнологии”. Самара, 2009. 121 с.
3. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. М.: Высшая школа, 2005. 840 с.
6. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1967. 500 с.
7. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова. Новополюцк: ПГУ, 2020. 21 с.
URL: <https://elib.psu.by/handle/123456789/25335> (дата обращения 02.08.2020).

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

БИФУРКАЦИИ ПЕТЛИ СЕПАРАТРИСЫ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматриваются кусочно-гладкие векторные поля на плоскости, имеющие петлю сепаратрисы особой точки на линии разрыва поля. Описываются бифуркационные диаграммы для типичных двухпараметрических возмущений таких векторных полей.

Ключевые слова: кусочно-гладкая динамическая система, особая точка, петля сепаратрисы, бифуркационная диаграмма.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

BIFURCATIONS OF A SEPARATRIX LOOP OF A PIECEWISE SMOOTH DYNAMICAL SYSTEM

We consider piecewise-smooth vector fields on the plane that have a separatrix loop of a singular point on the line of discontinuity of the field. Bifurcation diagrams for generic two-parameter perturbations of such vector fields are described.

Keywords: piecewise smooth dynamical system, singular point, separatrix loop, bifurcation diagram.

Изучение бифуркаций кусочно-гладких динамических систем на плоскости представляет значительный интерес для приложений. Этим вопросам посвящено значительное число работ, в частности, книги [1–3] и статьи [4–24].

Рассмотрим семейство X_ε кусочно-гладких векторных полей на координатной плоскости (x, y) , зависящее от двумерного параметра ε и удовлетворяющее условиям $(C_1) - (C_7)$, сформулированным ниже.

(C_1) В полуплоскостях $M^+ : y \geq 0$ и $M^- : y \leq 0$ поле X_ε совпадает с гладким векторным полем, соответственно, X_ε^+ и X_ε^- ; при этом вектор $X_\varepsilon^\pm(x, y) \in C^3$ -гладко зависит от (x, y, ε) .

(C₂) Поле X_ε^+ имеет гиперболическое седло $S(\varepsilon) = (s_1(\varepsilon), s_2(\varepsilon))$, причём $S(0) = O = (0, 0)$.

(C₃) Для поля X_0^+ инвариантные многообразия седла O трансверсальны линии $M_0 : y = 0$, а седловой индекс γ , равный модулю дроби, числитель (знаменатель) которой – отрицательное (положительное) собственное значение линейного оператора $dX_0^+(O)$, отличен от единицы.

(C₄) Вектор $X_0^-(O)$ направлен внутрь M^+ и не является собственным вектором линейного оператора $dX_0^+(O)$, соответствующим положительному собственному значению.

(C₅) Для вектора $X_0^0(x) = (P_0(x), 0)$, однозначно определенного условием $X_0^0(x, 0) = \tau(x)X_0^-(x, 0) + (1 - \tau(x))X_0^+(x, 0)$ при некотором $\tau(x) \in [0, 1]$, величина $\lambda^0 := P_0'(0) \neq 0$.

(C₆) Существует траектория L_0 поля X_0 , лежащая в M^+ , являющаяся и выходящей и входящей сепаратрисой седла O поля.

Пусть $v = (v_1, v_2)$ – собственный вектор линейного оператора $dX_0^+(O)$, соответствующий отрицательному собственному значению, а $X_0^-(O) = (\xi_1, \xi_2)$. Вследствие условий (C₃) и (C₄) $v_2 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$. Обозначим $R := v_1/v_2 - \xi_1/\xi_2$. Ввиду (C₄) $R \neq 0$.

Выберем C^∞ -вложение $\eta : (-1, 1) \rightarrow \text{int } M_+$, трансверсальное L_0 в точке $\eta(0) \in L_0$, так, чтобы репер $(X_0^+(\eta(0)), \eta'(0))$ был положительно ориентирован. Выходящая (входящая) сепаратриса седла $S(\varepsilon)$ при ε , достаточно близких к нулю, C^2 -гладко зависит от ε [25] и потому пересекает дугу $\eta(-1, 1)$ в точке $\eta(v_+(\varepsilon))$ ($\eta(v_-(\varepsilon))$), где $v_\pm(\cdot) \in C^2$, $v_\pm(0) = 0$. Обозначим $\tilde{v}(\varepsilon) := v_+(\varepsilon) - v_-(\varepsilon)$.

(C₇) Векторы $\partial s_2(0)/\partial \varepsilon$ и $\partial \tilde{v}(0)/\partial \varepsilon$ линейно независимы.

Из (C₇) следует, что в некоторой окрестности нуля на плоскости параметров ε можно выбрать C^2 -координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что

$$\tilde{x}_2(\varepsilon) = -\varepsilon_1, \quad \tilde{v}(\varepsilon) = \varepsilon_2.$$

Далее будем отождествлять точку ε на плоскости параметров с ее координатной строкой: $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Целью настоящей работы является описание бифуркационных диаграммы семейства X_ε и соответствующих перестроек фазовых портретов в окрестности петли $\Gamma_0 = L_0 \cup \{O\}$. Случай $\lambda^0 < 0$, $\gamma > 1$ был изучен в статье [22]. Здесь мы рассмотрим остальные возможные случаи. Для полноты приведем и результаты из [22].

Теорема. Пусть выполняются условия У1 – У7. Тогда существуют окрестность U петли Γ_0 , граница ∂U которой состоит из двух кусочно-гладких кривых Γ^- и Γ^+ , расположенных соответственно с отрицательной и положительной стороны Γ_0 , и число $\delta > 0$ со следующими свойствами:

1) Положительные полутраектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, начинающиеся в точках Γ^+ , при $\gamma > 1$ ($\gamma < 0$) входят в U (выходят из U), а начинающиеся во всех точках Γ^- , за исключением единственной точки $A_1 \in M_0 \cap \Gamma^-$ при $\lambda^0 > 0$, входят в U ; положительная полутраектория, начинающая в точке A_1 при $\lambda^0 > 0$, выходит из U по M_0 .

2) Бифуркационная диаграмма семейства векторных полей X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, в U представляет собой разбиение области параметров $(-\delta, \delta)^2$ на множества $B_0 = \{(0,0)\}$, B_i , E_i ($i = 1, \dots, 4$ при $\lambda^0 < 0$, $R < 0$ и $i = 1, \dots, 5$ в остальных случаях), где

- в случае $\lambda^0 < 0$, $R < 0$ (рис. 1 при $\gamma > 1$ и рис. 2 при $\gamma < 1$)

$$E_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), -\delta < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\}, \quad B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_1 : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta), \text{ если } \gamma > 1, \text{ и } \beta_1 : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, 0), \text{ если } \gamma < 1,$$

$$\beta_1 \in C^1, \quad \beta_1(+0) = \beta_1'(+0) = 0, \quad E_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta\},$$

$$B_2 = \{0\} \times (0, \delta), \quad E_3 = (-\delta, 0) \times (0, \delta), \quad B_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}, \quad E_4 = (-\delta, 0) \times (-\delta, 0),$$

$$B_4 = \{0\} \times (-\delta, 0);$$

- в случае $\lambda^0 < 0$, $R > 0$ (рис. 3 при $\gamma > 1$ и рис. 4 при $\gamma < 1$)

$E_1, B_1, B_2, E_2, E_3, B_3$ определяются так же, как в случае $\lambda^0 < 0$, $R < 0$,

$$E_4 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \beta_4(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < 0\}, \quad B_4 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \varepsilon_2 = \beta_4(\varepsilon_1)\},$$

$$E_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), -\delta < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)\}, \quad B_5 = \{0\} \times (-\delta, 0),$$

$$\beta_4 : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \quad \beta_4 \in C^1, \quad \beta_4(-0) = \beta_4'(-0) = 0;$$

- в случае $\lambda^0 > 0$ (рис. 5 при $\gamma > 1$ и рис. 6 при $\gamma < 1$)

$$E_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), -\delta < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\}, \quad B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)\},$$

$$E_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)\}, \quad B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)\},$$

$$E_3 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta\},$$

$$\beta_k : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, -\delta), \quad \beta_k \in C^1, \quad \beta_k(+0) = \beta_k'(+0) = 0 \quad (k=1,2),$$

$$\beta_1(\varepsilon_1) < 0 < \beta_2(\varepsilon_1) \text{ при } \gamma > 1 \text{ и } \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1) < 0 \text{ при } \gamma < 1,$$

$$B_3 = \{0\} \times (0, \delta), \quad E_4 = (-\delta, 0) \times (0, \delta), \quad B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}, \quad E_5 = (-\delta, 0) \times (-\delta, 0),$$

$$B_5 = \{0\} \times (-\delta, 0).$$

Схемы фазовых портретов векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in E_i$ и $\varepsilon \in B_i$ имеют вид, изображенный на рис. 1 в случае $\lambda^0 < 0, R < 0, \gamma > 1$, на рис. 2 в случае $\lambda^0 < 0, R < 0, \gamma < 1$; на рис. 3 в случае $\lambda^0 < 0, R > 0, \gamma > 1$; на рис. 4 в случае $\lambda^0 < 0, R > 0, \gamma < 1$; на рис. 5 в случае $\lambda^0 > 0, \gamma > 1$ и на рис. 6 в случае $\lambda^0 > 0, \gamma < 1$; причем векторные поля X_ε при $\varepsilon \in E_i$ – грубые в U , а при $\varepsilon \in B_i$ ($i \neq 0$) – первой степени негрубости в U .

Доказательство для случаев $\lambda^0 < 0, \gamma > 1, R < 0$ и $R < 0$ приведено в [22]. Для остальных случаев оно отличается непринципиальными изменениями. Поэтому мы его опустим.

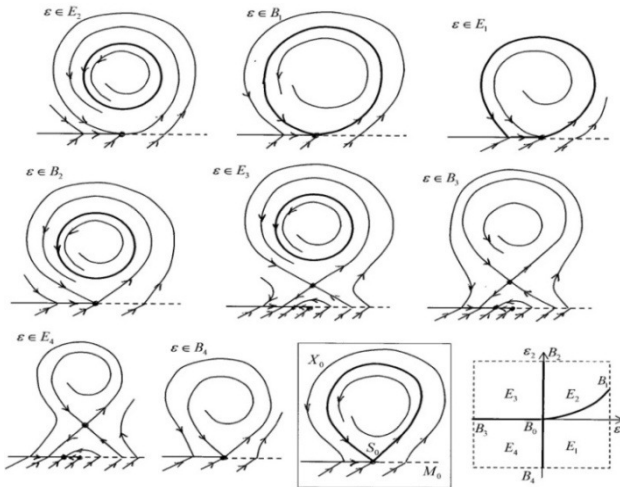


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма в случае $\lambda^0 < 0, R < 0, \gamma^0 > 1$

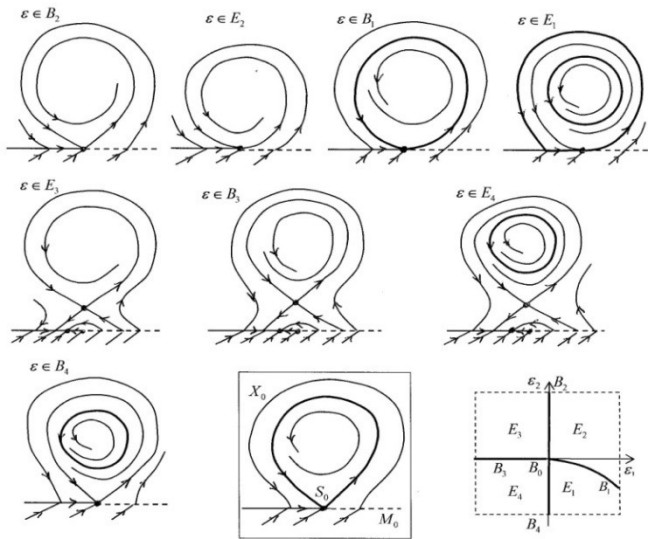


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в случае $\lambda^0 < 0, R < 0, \gamma < 1$

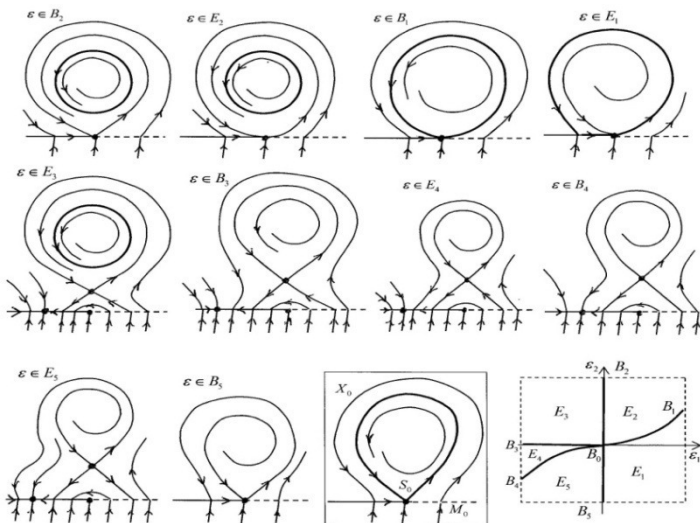


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма в случае $\lambda^0 < 0, R > 0, \gamma > 1$

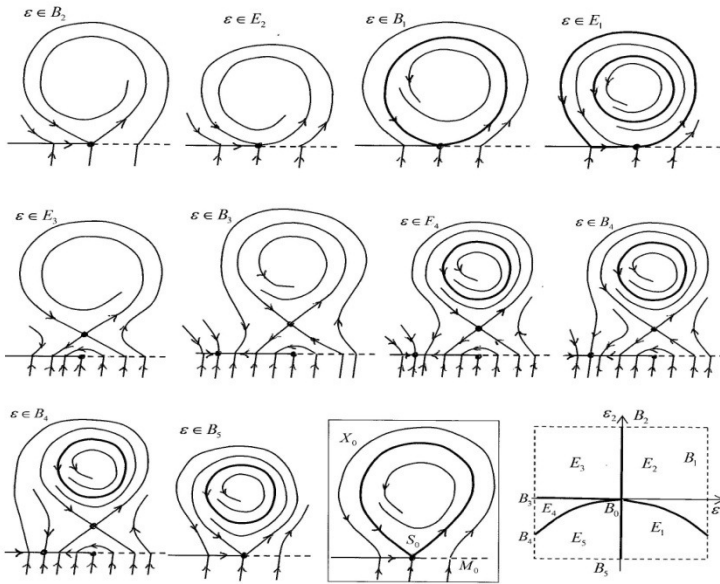


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма в случае $\lambda^0 < 0, R > 0 \gamma^0 < 1$

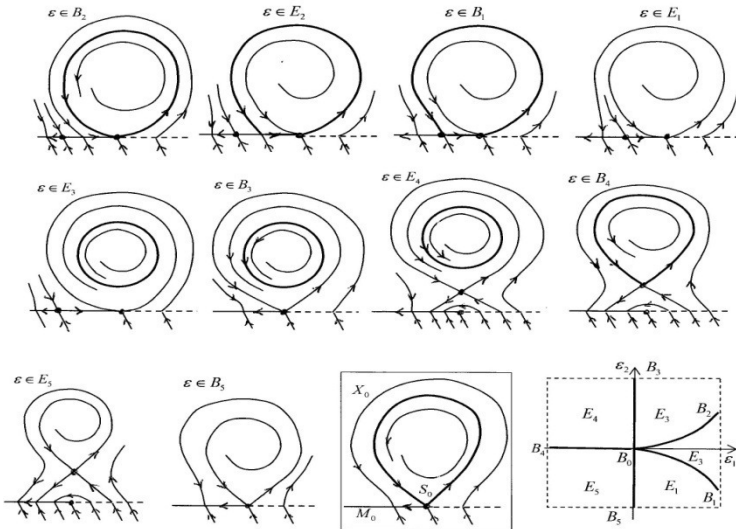


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма в случае $\lambda^0 > 0, \gamma > 1$

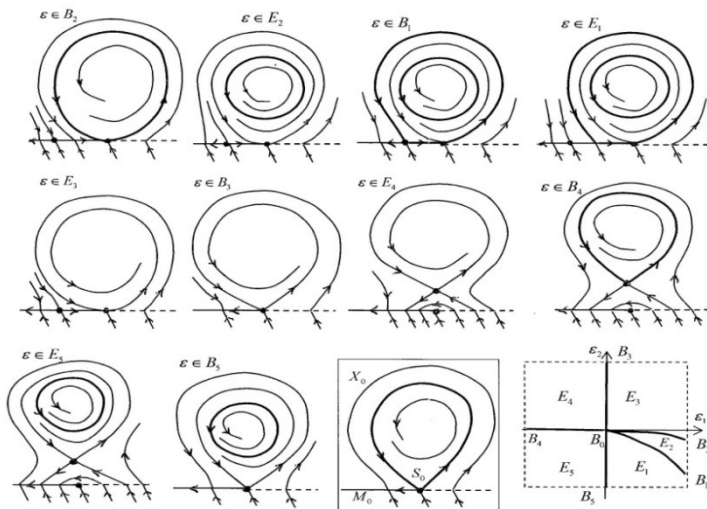


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма в случае $\lambda^0 > 0, \gamma < 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Piecewise smooth dynamical systems / M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A.R. Caprney, P. Kowalczyk // Appl. Math. Sci. V. 163. London: Springer-Verlag. 2008. 483 p.
3. Simpson D.J.W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems // World scientific series on nonlinear science. Series A. Vol. 69. World Scientific Publ. 2010. 238 p.
4. Kuznetsov Yu.A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems / Yu.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, A. Gragnani // Intern. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2003. Vol. 13, No. 8. P. 2157–2188. DOI: 10.1142/S0218127403007874
5. Guardia M. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems / M. Guardia, T.M. Seara, M.A. Teixeira // J. of Differential Equations. 2011. Vol. 250, No. 4. P. 1967–2023. DOI: 10.1016/j.jde.2010.11.0163.
6. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях петель сепаратрис особых точек на линии разрыва. Яросл. политехн. ин-т. Ярославль, 1987. Деп. в ВИНТИ 22.04.1987, № 2795-B87.
7. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях кусочно-гладкого векторного поля в окрестности петли сепаратрисы особой точки на линии разрыва // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.5. Ярославль, 2006. С. 49–52.
8. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях кусочно-гладких векторных полей, имеющих петлю сепаратрисы седла, находящегося на линии разрыва // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 6. 2008. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. С. 46–56.
9. Ройтенберг В.Ш. О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и шитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля // Вестник Костром. гос. ун-та им. Н.А. Некрасова. 2014. Т. 20, № 2. С. 26–30.

10. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях шитого тройного цикла // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль, 2014. С. 54–67.
11. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях шитого фокуса // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28: Сб. трудов XXVIII Междунар. науч. конф. 2015. Т. 1. С. 27–31.
12. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении периодической траектории из точки пересечения линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Сер.: Естественно-математ. и техн. науки. 2016, № 2. С. 34–38.
13. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях в окрестности точки стыка линий разрыва векторного поля // Научно-технический вестник Поволжья. 2016, № 5. С. 30-33.
14. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодической траектории кусочно-гладкого векторного поля на плоскости, проходящей через точку «стыка» линий разрыва поля // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль, 2016. С. 57-65.
15. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодической траектории с односторонним касанием линии разрыва векторного поля // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 2, ч. 1. С. 37–45.
16. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении странного аттрактора из точки стыка линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Сер.: Естественно-математ. и техн. науки. 2016. № 4. С. 53–59.
17. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2017. № 2 (42). С. 18–31. DOI 10.21685/2072-3040-2017-2-2
18. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях особой точки типа «сшитый клюв» // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естественно-математ. и техн. науки. 2017. № 4 (211). С. 22–29.
19. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях предельного цикла, проходящего через точку пересечения линий разрыва векторного поля и касающегося одной из них // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер.: Математика. Физика. 2018. Т. 50, № 1. С. 21–34. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-21-34
20. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях особой точки типа «полуфокус» кусочно-гладкой динамической системы на плоскости // Математика и математическое моделирование. 2018. № 5. С. 58–71. DOI: 10.24108/mathm.0518.0000140.
21. *Ройтенберг В.Ш.* Локальные бифуркации обратимых кусочно-гладких динамических систем на плоскости // Математика и математическое моделирование. 2020. № 1. С. 1–15. DOI: 10.24108/mathm.0120.0000213
22. *Ройтенберг В.Ш.* О некоторых бифуркациях обратимых кусочно-гладких динамических систем на плоскости // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Сер.: Естественно-математ. и техн. науки. 2020, № 2. С. 11–17.
23. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях петли сепаратрисы двумерной кусочно-гладкой динамической системы // Известия вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2020. № 1 (53). С. 36–50. DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-3.
24. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией // Известия вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2020. № 3 (55). С. 98–113. DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-8
25. *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем. Введение / Ж. Палис, В. Мелу. М.: Мир, 1986. 301 с.

УДК 517.9

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка, правые части которых являются полиномами четвертой степени относительно искомой функции с периодическими непрерывными коэффициентами, и соответствующие векторные поля на цилиндрическом фазовом пространстве. В случае, когда свободный член и старший коэффициент не обращаются в нуль, а коэффициент при третьей степени равен нулю, определяется возможное число предельных циклов на фазовом цилиндре.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Абеля, периодические коэффициенты, фазовый цилиндр, периодическое решение, число предельных циклов.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON THE LIMIT CYCLES OF POLYNOMIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH DEGREE
WITH PERIODIC COEFFICIENTS**

The paper considers differential equations of the first order, the right-hand sides of which are polynomials of the fourth degree with respect to the desired function with periodic continuous coefficients, and the corresponding vector fields on the cylindrical phase space. In the case when the free term and the leading coefficient do not vanish, and the third coefficient is zero, the possible number of limit cycles on the phase cylinder is determined.

Keywords: Abel differential equation, periodic coefficients, phase cylinder, periodic solution, number of limit cycles.

Имеется ряд работ, например [1–6], в которых даются оценки числа замкнутых траекторий в цилиндрическом фазовом пространстве

$\mathbb{R} / \omega\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ для обобщенных дифференциальных уравнений Абеля $\dot{x} = a_n(t)x^n + \dots + a_1(t)x + a_0(t)$ с ω -периодическими непрерывными коэффициентами $a_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$. При $n \geq 3$ в случае знакопеременного коэффициента $a_n(t)$ уравнение может иметь сколь угодно много замкнутых траекторий. Если коэффициент $a_n(t)$ не обращается в нуль, то при $n \leq 3$ число замкнутых траекторий с учетом их кратности не превосходит n .

В работах [7, 8] рассматривалось дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{x} = a_n(x)\dot{x}^n + \dots + a_1(x)\dot{x} + a_0(x)$ с ω -периодическими коэффициентами $a_k(x)$. Заменой $\dot{x} = y$ оно сводится к уравнению

$$y' = a_n(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y + a_1(x) + a_0(x)/y.$$

При $a_0(x) \equiv 0$ это уравнение является обобщенным уравнением Абеля.

В настоящей работе мы рассмотрим уравнение четвертой степени

$$\dot{x} = a_4(t)x^4 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t) \tag{1}$$

с коэффициентом $a_4(t)$, не обращающимся в нуль. В работе [5] показано, что такое уравнение может иметь любое число замкнутых траекторий. Мы оценим число замкнутых траекторий при дополнительном условии $a_0(t) \neq 0$. Случай $a_0(t) \equiv 0$ для более общих, чем (1), уравнений рассматривался в [6].

Обозначим $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} / \omega\mathbb{Z}$. Уравнение (1) определяет на фазовом пространстве $\Phi := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ векторное поле $\vec{a}(s, x) = \partial / \partial s + a(s, x) \partial / \partial x$, где $a(s, x) = a_4(s)x^4 + a_2(s)x^2 + a_1(s)x + a_0(s)$. Его траектории называются *траекториями уравнения* (1) в фазовом пространстве Φ .

Пусть $X(u, t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $X(u, 0) = u$. Траектория $x = X(x_0, t)$, $s = t \bmod \omega$ является замкнутой тогда и только тогда, когда x_0 – нуль функции расхождения $d(u) := X(u, \omega) - u$. Для уравнения (1) функция расхождения является аналитической [9]. Кратность ее нуля x_0 называется *кратностью* замкнутой траектории (предельного цикла). Если $d'(x_0) < 0$ ($d'(x_0) > 0$), то замкнутая траектория называется *устойчивым* (*неустойчивым*) *гиперболическим предельным циклом*.

Так как $\forall t a_0(t) \neq 0$, то любая замкнутая траектория уравнения (1) лежит либо в области $\Phi^+ := \mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$, либо в области $\Phi^- := \mathbb{S}^1 \times (-\infty, 0)$.

Теорема. Если для любого $t \in \mathbb{R}$ $a_0(t)a_4(t) < 0$, то уравнение (1) имеет в каждой из областей Φ^+ и Φ^- не более трех замкнутых траекторий, с учетом их кратности.

Если для любого $t \in \mathbb{R}$ $a_0(t)a_4(t) > 0$, то уравнение (1) имеет в каждой из областей Φ^+ и Φ^- не более двух замкнутых траекторий, с учетом их кратности.

Доказательство. Так как при отображении $x \mapsto -x$ область Φ^- переходит в область Φ^+ , а уравнение (1) переходит в уравнение $\dot{x} = -a_4(t)x^4 - a_2(t)x^2 + a_1(t)x - a_0(t)$, то достаточно доказать утверждения теоремы для области Φ^+ .

Случай $a_4(t) < 0$ сводится к случаю $a_4(t) > 0$ заменой в уравнении (1) t на $-t$. Таким образом, достаточно рассмотреть два варианта: (А) $a_0(t) < 0, a_4(t) > 0$ и (Б) $a_0(t) > 0, a_4(t) > 0$.

Так как $a_4(t) > 0$, то существует такое число $R > 0$, что

$$a(s, x) > 0, \text{ если } s \in \mathbb{S}^1, |x| \geq R. \quad (2)$$

Отсюда следует, что все замкнутые траектории уравнения (1) в Φ^+ принадлежат области $\Phi_R^+ := \mathbb{S}^1 \times (0, R)$.

Рассмотрим случай (А). Из неравенства $a_0(x) < 0$ и (2) получаем, что траектории в точках $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \cup \mathbb{S}^1 \times \{R\}$ выходят из Φ_R^+ . Поэтому сумма кратностей замкнутых траекторий, лежащих в Φ^+ , нечетна.

В рассматриваемом случае функции $X(u, \omega)$, $d(u)$ и

$$h(u) := \int_0^\omega a'_x(t, X(u, t)) dt = \ln X'_u(u, \omega)$$

определены и являются аналитическими на некотором интервале $J \subset (0, \infty)$.

Так как $\forall (s, x) \in \Phi^+ a'''_{xxx}(s, x) = 24a_4(s)x > 0$, то из доказательства леммы в [7] следует, что $\forall u \in J h''(u) > 0$. Из этого неравенства, аналогично [7] вытекает, что уравнение имеет в Φ^+ не более трех периодиче-

ских решений с учетом их кратности. Для случая (А) утверждение теоремы доказано.

В случае (Б) также получаем, что уравнение имеет в Φ^+ не более 3-х периодических решений с учетом их кратности. Так как в этом случае траектории уравнения a в точках $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ входят в Φ_R^+ , а в точках $\mathbb{S}^1 \times \{R\}$ выходят из Φ_R^+ , то сумма кратностей замкнутых траекторий, лежащих в Φ^+ , четна. Следовательно, уравнение имеет в Φ^+ не более двух периодических решений с учетом их кратности.

Таким образом, теорема доказана.

Приведем примеры уравнений с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих условиям теоремы. В обоих случаях (А) и (Б) сумма кратностей всех предельных циклов уравнения четна.

Случай (А). Пусть числа $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ не равны нулю и имеют одинаковый знак, а $x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$. Уравнение

$$\dot{x} = x^4 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{3}$$

где

$$a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j, \quad a_1 = - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i x_j x_k, \quad a_0 = x_1 x_2 x_3 x_4 \tag{4}$$

имеет четыре предельных цикла $x = x_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, с учетом их кратности. Пусть число $p > 0$. Тогда уравнение $\dot{x} = x^4 + (1 - p^2)x^2 - p^2$ имеет гиперболические предельные циклы $x = p$ и $x = -p$.

Случай (Б). Выберем числа $x_1 \leq x_2 < 0 < x_3 \leq x_4$ так, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Тогда уравнение (3) с коэффициентами (4) имеет с учетом кратности четыре предельных цикла $x = x_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Пусть числа $x_1 \leq x_2$ не равны нулю и имеют одинаковый знак. Тогда уравнение (3), где $a_2 = -x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 - 1$, $a_3 = x_1 x_2 (x_1 + x_2 + 1)$, $a_4 = -x_1 x_2$, имеет с учетом кратности два предельных цикла $x = x_1$ и $x = x_2$. Уравнение $\dot{x} = x^4 + 1$ не имеет предельных циклов.

В случае (А) не существует уравнений с постоянными коэффициентами, для которых сумма кратностей всех замкнутых траекторий равна шести. Было бы интересно построить пример такого уравнения с переменными коэффициентами или опровергнуть такую возможность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плисс В.А.* О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью // ДАН СССР . 1959. Т. 127, №5. С. 965–968.
2. *Neto A.L.* On the number of solutions of the equation for which $x(0)=x(1)$ // Invent. Math. 1980. V. 59, no. 2. P. 67–76.
3. *Панов А.А.* О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами // Функциональный анализ и приложения. 1999. Т. 33, № 4. С. 84–88.
4. *Ulyashenko Ju.* Hilbert-type number for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions // Nonlinearity 2000. V. 13. P. 1337–1342.
5. *Casull A.* Limit cycles for generalized Abel equations / A. Casull, A.Guillamon // J. Bifurcation Chaos. 2006. V. 16. P. 3737–3745.
6. *Ройтенберг В.Ш.* О числе периодических решений некоторых полиномиальных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестник Бурятского гос. ун-та. 2020. № 1. С. 28–34. DOI: 10.18101/2304-5728-2020-1-28-34
7. *Ройтенберг В.Ш.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, не имеющих особых точек // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика Физика» 2020. Т. 12, № 4. С. 33–40. DOI: 10.14529/mmph200404
8. *Ройтенберг В.Ш.* О типичных полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 2122-2130.
9. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1981. 232 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 51

**Л. В. Белякова¹, Н. М. Гулевич¹, В. О. Кузнецов¹,
С. А. Старостина²**

¹Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова

Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: liubov.belyakova@yandex.ru,*
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo_kuz@mail.ru

²Военный институт (Железнодорожных войск и военных сообщений)
Военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулёва

Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: sardana-starostina@mail.ru*

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Рассматриваются методы решения некоторых задач студенческих математических олимпиад по комплексным числам. Материал можно использовать на занятиях студенческого математического кружка.

Ключевые слова: комплексное число, экстремум, уравнение, неравенство.

**L. V. Belyakova¹, N. M. Gulevich¹, V. O. Kuznetsov¹,
S. A. Starostina²**

¹Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, *e-mail: liubov.belyakova@yandex.ru,*
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo_kuz@mail.ru

²Military Institute (of railway Troops and Military Transport)
of Khrulev Military Academy of Logistics
Russia, Saint Petersburg, *e-mail: sardana-starostina@mail.ru*

COMPLEX NUMBERS IN OLYMPIAD PROBLEMS

Methods for solving some problems of student mathematical olympiads on complex numbers are considered. This material can be used in the work of the student mathematical olympiad lesson.

Keywords: complex number, extremum, equation, inequality.

1. Задачи на экстремум

1.1. (Математическая олимпиада студентов технических вузов Москвы, 1998 г.)

Найдите наименьшее значение $|z|$, если $|z+i|-|z-i|=\frac{1}{2}$.

Решение. Применим неравенство треугольника:

$$|z| = \frac{|z+i-(i-z)|}{2} \geq \frac{||z+i|-|z-i||}{2} = \frac{1}{4}.$$

Причем равенство в неравенстве имеет место только в том случае, когда

$$\arg(z+i) = \arg(i-z) \Leftrightarrow z = \lambda i, \lambda \in [-1, 1].$$

Поскольку $\lambda \in [-1, 1]$, то $|\lambda i+i|-|\lambda i-i| = \lambda+1-(1-\lambda) = 2\lambda$. Откуда $\lambda = 1/4$. Для $z_0 = \frac{i}{4}$ имеем $|z_0| = \frac{1}{4}$ и $|z_0+i|-|z_0-i| = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

1.2. ([4]) Для комплексных чисел, удовлетворяющих неравенству $|z| \leq 2$, найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $|z^2-5|$.

Решение. Имеем

$$|z^2-5| \geq 5-|z|^2 \geq 1, \quad |z^2-5| = 5-|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 2;$$

$$|z^2-5| \leq |z|^2+5 \leq 9, \quad |z^2-5| = |z|^2+5 = 9 \Leftrightarrow z = \pm 2i.$$

Ответ: 9 и 1.

1.3. ([4]) Найти наименьшее значение выражения $|z-5|+|z-5i|$, где комплексное число z удовлетворяет условию $z^2-\bar{z}^2=16i$.

Решение. Пусть $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Имеем

$$z^2-\bar{z}^2=16i \Leftrightarrow (x+iy)^2-(x-iy)^2=16i \Leftrightarrow xy=4.$$

Далее

$$|z-5|+|z-5i| \geq |(z-5)-(z-5i)| = |5i-1| = 5\sqrt{2}$$

и равенство в этом неравенстве реализуется только для комплексных чисел, лежащих на отрезке, соединяющем точки $z_1=5$ и $z_2=5i$, то есть для

комплексных чисел $z = x + iy$, где $x + y = 5$. Решая систему $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$, находим два решения: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 4 + i$ и $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow z_2 = 1 + 4i$. Поскольку система совместна, то

Ответ: $5\sqrt{2}$.

1.4. ([2]) Найти наибольшее значение выражения $|(u-v)(v-w)(u-w)|^2$, где $u, v, w \in \mathbb{C}$ и $|u|, |v|, |w| \in [0, 1]$.

Решение. $a = |u - v|, b = |v - w|, c = |u - w|$ – длины сторон треугольника, лежащего в единичном круге. По неравенству Коши для средних

$$|(u-v)(v-w)(u-w)|^2 = (abc)^2 \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6,$$

причем равенство достигается только тогда, когда $a = b = c$.

Покажем, что из всех треугольников, лежащих в единичном круге, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник, вписанный в единичную окружность.

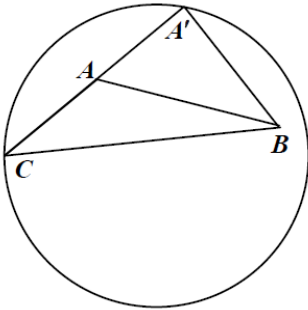


Рис. 1

Пусть ABC – треугольник с наибольшим периметром. Тогда все его вершины лежат на единичной окружности. Действительно, если, например, вершина A лежит внутри круга (рис. 1), то продолжая сторону CA до пересечения с единичной окружностью в точке A' , получим (в силу неравенства между длинами сторон в треугольнике $AA'B$) треугольник $A'BC$ с большим периметром.

Покажем теперь, что треугольник с наибольшим периметром является равносторонним. Действительно, пусть, например, $AB < BC$ и $AB'C$ – равнобедренный треугольник, вписанный в единичную окружность (так, что $\angle B = \angle B'$). Пусть α, β, γ – углы треугольника ABC при вершинах A, B, C соответственно. Тогда $\gamma < \alpha$ и по теореме синусов

$$AB + BC = 2(\sin \alpha + \sin \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\pi - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} < 4 \cos \frac{\beta}{2} = AB' + B'C.$$

Таким образом, периметр треугольника ABC меньше периметра треугольника $AB'C$. Получаем противоречие, из которого следует, что ABC – равносторонний треугольник

Если ABC – равносторонний треугольник, вписанный в единичную окружность, то $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^6 = 27$. Таким образом, $|(u-v)(v-w)(u-w)|^2 \leq 27$, причем равенство достигается тогда, когда u, v, w – вершины правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

Ответ: 27.

1.5. Известно, что $\max_{-1 \leq x \leq 1} |ax + b| = M$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Докажите, что $|az + b| \leq \frac{M}{2}(|z - 1| + |z + 1|)$ для любого $z \in \mathbb{C}^1$.

Решение. По условию задачи $|a - b| \leq M$, $|a + b| \leq M$. Поэтому

$$|az + b| = \left| \frac{a-b}{2}(z-1) + \frac{a+b}{2}(z+1) \right| \leq \frac{1}{2}(|a-b||z-1| + |a+b||z+1|) \leq \frac{M}{2}(|z-1| + |z+1|).$$

1.6. ([1]) На окружности $|z - 2i| = 1$ найти точки z , для которых модуль $|z - \sqrt{3} - i|$: 1) минимален, 2) максимален.

Решение. Замена $w = z - 2i$ сводит задачу к нахождению на единичной окружности точек, расстояние которых до точки $w = \sqrt{3} - i$ минимально/максимально. Это точки пересечения единичной окружности с прямой, соединяющей точку $w = \sqrt{3} - i$ с началом координат. Поскольку $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, то это расстояние минимально (и равно 1) для точки $w_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ и максимально (и равно 3) для точки $w_2 = -w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем

Ответ: 1 при $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; 3 при $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$.

¹ В [3] предлагалось доказать более слабый результат.

2. Уравнения

2.1. ([4]). Решить уравнение $|2z - 1| = 4iz$.

Решение. $4iz = \frac{4z}{-i} = |2z - 1| \geq 0 \Rightarrow z = -\lambda i, \lambda \geq 0$. Из исходного уравнения получаем

$$|-2\lambda i - 1| = 4\lambda \Leftrightarrow 1 + 4\lambda^2 = 16\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow z = -\frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $-\frac{i}{2\sqrt{3}}$.

2.2. ([4]). Найти все решения уравнения $5iz^4 + 4z^3 - 4z + 5i = 0$, удовлетворяющие условию $|z| = 1$.

Решение. Поскольку $z = 0$ не является решением уравнения, то уравнение $5(z^2 + z^{-2}) + 4i(z^{-1} - z) = 0$ равносильно исходному. Замена $t = i(z^{-1} - z)$ приводит к уравнению

$$5t^2 - 4t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = t_{1,2} = \frac{2 \pm 3\sqrt{6}}{5}.$$

Причем $4 - t^2 = \frac{42 \mp 12\sqrt{6}}{25} = \frac{(6 \mp \sqrt{6})^2}{25} > 0$.

Возвращаясь к переменной z , получаем

$$z^2 - iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{it \pm \sqrt{4 - t^2}}{2},$$

где $|z| = \sqrt{\frac{4 - t^2}{4} + \frac{t^2}{4}} = 1$. Имеем

$$t = t_1 = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{5} \Rightarrow z_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{4 - t_1^2}}{2} + i \frac{t_1}{2} = \pm \frac{(6 - \sqrt{6})}{10} + i \frac{2 + 3\sqrt{6}}{10},$$

$$t = t_2 = \frac{2 - 3\sqrt{6}}{5} \Rightarrow z_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{4 - t_2^2}}{2} + i \frac{t_2}{2} = \pm \frac{(6 + \sqrt{6})}{10} + i \frac{2 - 3\sqrt{6}}{10}.$$

Таким образом, все четыре корня исходного уравнения лежат на единичной окружности. Заметим также, что исходное уравнение было решено без использования дополнительного условия $|z| = 1$.

Ответ: $z_{1,2} = \pm \frac{(6 - \sqrt{6})}{10} + i \frac{2 + 3\sqrt{6}}{10}$, $z_{3,4} = \pm \frac{(6 + \sqrt{6})}{10} + i \frac{2 - 3\sqrt{6}}{10}$.

2.3. Найти общие корни уравнений $z^{100} + \bar{z} + 1 = 0$ и $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$.

Решение. $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1, \\ z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \end{cases}$

$$(-1)^{100} + \overline{(-1)} + 1 = 1 \neq 0,$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} z^3 = 1, \\ \bar{z} = z^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{100} + \bar{z} + 1 = (z^3)^{33} z + \bar{z} + 1 = z + z^{-1} + 1 = z^{-1}(z^2 + z + 1) = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2.4. ([4]). Найти все вещественные решения уравнения $(ix+1)^{100} = (x+i)^{100}$.

Решение. $(ix+1)^{100} = i^{100}(x-i)^{100} = (x-i)^{100}$. Поскольку $x = -i$ не является решением уравнения, то

$$(ix+1)^{100} = (x+i)^{100} \Leftrightarrow (x-i)^{100} = (x+i)^{100} \Leftrightarrow \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{100} = 1.$$

Пусть $\frac{x-i}{x+i} = t$. Тогда $t \neq 1$ и $t^{100} = 1$. Поэтому $t = e^{i\varphi_k}$, $k = 1, 2, \dots, 99$, где

$$\varphi_k = \frac{\pi k}{50}. \text{ Далее}$$

$$\frac{x-i}{x+i} = t \Rightarrow x = i \frac{t+1}{t-1} = i \frac{e^{i\varphi_k} + 1}{e^{i\varphi_k} - 1} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi_k}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{100}, \quad k = 1, 2, \dots, 99.$$

Поскольку $(x-i)^{100} - (x+i)^{100}$ – многочлен 99-й степени, то все корни исходного уравнения являются вещественными. Заметим также, что исходное уравнение было решено без использования условия $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x = \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{100}, \quad k = 1, 2, \dots, 99$.

2.5. ([4]). Решить уравнение $z^3 + 3z^2 + 3z + |z+1| = 1$.

Решение. $z^3 + 3z^2 + 3z + |z+1| = 1 \Leftrightarrow w^3 + |w| - 2 = 0$. Следовательно, $w^3 \in \mathbb{R}$ и $w^3 = \pm r^3$, где $r = |w| \geq 0$.

Предположение $w^3 = -r^3$ приводит к уравнению $r^3 - r + 2 = 0$, не имеющему решений на $[0, \infty)$, поскольку при любом $r \geq 0$ имеем $r^3 - r + 2 \geq (r^3 - r + 2)\Big|_{r=1/\sqrt{3}} = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$.

Если же $w^3 = r^3$, то

$$r^3 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r^2 + r + 2) = 0 \Leftrightarrow r = 1 \Leftrightarrow w^3 = 1 \Leftrightarrow w = e^{2\pi ki/3},$$

$k = 0, \pm 1$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем

Ответ: $z = -1 + e^{2\pi ki/3}$, $k = 0, \pm 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович Ф.Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями / Ф.Д. Беркович, В.С. Федий, В.И. Шлыков // Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2001. 192 с.
2. Гашков С.Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. М.: МЦНМО, 2006. 328 с.
3. Пирожков М.А. Комплексная алгебра: доказательство неравенств и решение задач на экстремум // Сб. докл. семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе». Вып. 9. СПб.: ВИТУ, 2007. С. 154–160.
4. Сарайкин В.А. Сборник задач для подготовки курсантов к выступлению на олимпиадах по математике. Новосибирск: НВВКУ, 2019. 176 с.

УДК 51-7

Н. И. Гусарова, Е. В. Олейникова

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, *e-mail*: gusarova-73@mail.ru, ev.olejnikova@yandex.ru

ПОДХОДЫ ПРИ ВЫБОРЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В статье обсуждается необходимость разумного использования студентами технических специальностей вузов приложений для решения математических задач. Приведены рекомендации по выбору наиболее удачных моделей онлайн-калькуляторов, обоснована полезность участия преподавателя в процессе выбора и освоения вычислительных программ.

Ключевые слова: онлайн-калькулятор, визуализация, интерактивные методы обучения, прикладные программные средства.

N. I. Gusarova, E. V. Olejnikova

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, *e-mail*: gusarova-73@mail.ru, ev.olejnikova@yandex.ru

APPROACHES TO CHOOSING MODERN INFORMATION APPLICATIONS FOR MATHEMATICAL PROBLEMS SOLVING

The article discusses the need for reasonable use of applications for solving mathematical problems by students of technical specialties of higher education institutions. Recommendations for choosing the most successful models of online calculators are given, and the usefulness of the teacher's participation in the selection and development of computer programs is justified.

Keywords: online calculators, visualization, interactive teaching methods, applied software tools.

Невозможно существовать в современном мире и не обращать внимания на стремительные изменения вокруг. Безусловно, эти преобразования влияют и на сферу образования. Не остается в стороне и высшая школа. Если раньше удавалось убедить ответственных студентов, что лучше не использовать технику для решения задач, то теперь становится все труднее удержать молодежь от использования гаджетов и других новых технологий для изучения математических дисциплин. При этом надо от-

дать должное разработчикам подобных программ, год от года появляются все новые предложения очень достойного качества. Учитывая специфику вуза, который готовит технических специалистов для работы на производстве [1], все же надо обращать внимание на вычислительные программы и онлайн-калькуляторы.

О существовании таких серьезных математических программ, как MatLab, Mathematica, Maple, MathCad, знают многие, но не многие могут ими пользоваться по разным причинам. Ограничениями становятся и соблюдение авторских прав, и требования по установке данного приложения на компьютер, и, наконец, просто особенности оформления задач. Развитие мобильных устройств на основе таких операционных систем, как Android, iOS, Windows Phone, привело к возможности использования математических приложений в любых условиях практически без ограничений [2]. Но при выборе таких программ следует учитывать следующее: наличие теоретической основы, простота оформления, точность выполненных заданий, расчетов или чертежей графиков функций.

При самостоятельном выборе онлайн-калькуляторов у студентов обычно возникают сложности. Поэтому преподаватель должен обратить внимание на те аспекты, которые выделяют наиболее удобную программу. При этом одно и то же приложение для решения различных задач может оказаться в разных категориях.

Во-первых, калькулятор должен быть обязательно полностью русифицирован. Очень часто пользователь сталкивается с проблемой, что интерфейс ввода данных русскоязычный, а вывод, решение и комментарии к ним – англоязычные. Уровень языковой подготовки наших студентов, к сожалению, пока недостаточен для правильной интерпретации таких результатов.

Второй аспект – это наличие теоретических сведений по решаемой задаче. Они есть практически во всех калькуляторах, но в большинстве – это просто оцифрованные данные из учебников. В лучших моделях теория визуализирована и разбита на блоки непосредственно по ходу решения задачи.

Третья отличительная черта хорошего вычислительного приложения – наличие нескольких методов решения, из которых можно выбрать именно тот, который требуется преподавателем.

И самая важная особенность – это обязательное подробное пошаговое решение. Обычно при решении сразу дается окончательный ответ. Поэтому надо выбирать такие программы, в которых есть опция «Подробнее» или «Пошагово».

Оформим в виде табл. 1 основные особенности, на которые следует обращать внимание при выборе приложения для решения задач по различным разделам высшей математики [3].

Таблица 1

Решаемая задача	Необходимые функции приложения:
Операции над матрицами	<ul style="list-style-type: none"> - возможность использовать матрицы из других приложений и текстовых редакторов без необходимости вводить вручную; - пошаговое выполнение каждой операции с визуализацией схемы выбора требуемых элементов матриц.
Решение систем линейных алгебраических уравнений	<ul style="list-style-type: none"> - наличие нескольких методов решения; - при решении методом Гаусса возможность самостоятельного выбора элементарных преобразований над строками.
Вычисление пределов	<ul style="list-style-type: none"> - наличие нескольких методов, отличных от правила Лопиталя.
Нахождение производных функций	<ul style="list-style-type: none"> - возможность выбирать тип функции: явная, неявная, параметрическая; - наличие общепринятых в русскоязычной литературе обозначений функций; - понятность обозначения производных; - наличие пошагового решения с применением соответствующих формул – производных произведения, частного и т. д.
Проведение полного исследования функции	<ul style="list-style-type: none"> - наличие всех необходимых этапов исследования, возможность выбора дополнительных этапов; - ввод функции один раз – в самом начале исследования с проведением всех этапов для выбранной функции; - визуализация в виде таблиц или числовой оси интервалов знакопостоянства, монотонности, выпуклости функции.
Построение графика функции	<ul style="list-style-type: none"> - возможность выбора декартовых или полярных координат; - построение параметрически заданных функций; - наличие изображенных на графике асимптот; - правильное изображение графика при наличии точек разрыва и вертикальных асимптот.
Нахождение неопределенных интегралов	<ul style="list-style-type: none"> - возможность видеть при вводе интеграл, записанный в привычном виде; - пошаговое решение с отображением применяемых методов: замена, интегрирование по частям и др.
Вычисление определенных интегралов	<ul style="list-style-type: none"> - совмещение с вычислением неопределенного интеграла с отдельным шагом в виде применения формулы Ньютона-Лейбница; - наличие графика подынтегральной функции.
Решение дифференциальных уравнений	<ul style="list-style-type: none"> - подробная теория при пошаговом решении, включая определение типа уравнения и предложения нескольких способов решения; - возможность самостоятельного выбора типа уравнения с последующим решением методами, принятыми для выбранного типа; - наличие визуального построения интегральных кривых.
Вычисление значений логических функций	<ul style="list-style-type: none"> - построение таблиц истинности пошагово; - заполнение карт Карно; - пошаговая минимизация несколькими методами.

Таким образом, разумное использование приложений для решения математических задач позволит студентам в дальнейшем более грамотно применять высшую математику в инженерных расчетах [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусаров А.В.* Особенности изучения высшей математики выпускниками колледжей во время их обучения в техническом вузе // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. Вып. 7. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2019. С. 114–121.
2. *Гусарова Н.И.* Использование современных программных продуктов для преподавания математических дисциплин / Н.И. Гусарова, Е.В. Олейникова // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. Вып. 7. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2019. С. 221–225.
3. *Башкин М.А.* Об основных понятиях курса высшей математики // Наука. Образование. Общество: Материалы Всерос. науч.-техн. конф. 2017. С. 109–112.
4. *Гусарова Н. И.* Реализация компетентностного подхода при преподавании дисциплин естественнонаучного цикла в техническом вузе / Н.И. Гусарова, А.В. Гусаров, Е.В. Олейникова // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 300–305.

УДК 51:378.147

Ю. К. Оленикова

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: olenikovajk@mail.ru

ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ В ВУЗАХ

Обсуждается онлайн-обучение студентов очного отделения. В основу дискуссии положены материалы из интернета, а также авторский опыт преподавания курса математики онлайн для студентов Ярославского государственного технического университета в экстремальных условиях пандемии. Делается акцент на роли кратковременного промежуточного тестирования как контролирующей и обучающей составляющей процесса обучения.

Ключевые слова: дистанционное образование, онлайн-обучение, тестирование.

J. K. Olenikova

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: olenikovajk@ystu.ru

ONLINE TRAINING AND TESTING IN UNIVERSITIES

The online training of full-time students is discussed. The discussion is based on materials from the Internet, as well as the author's experience in teaching a course of mathematics online for students of the Yaroslavl State Technical University in the extreme conditions of a pandemic. The emphasis is placed on the role of short-term intermediate testing as a controlling and teaching component of the learning process.

Keywords: distance education, online learning, testing.

Прошел почти год от вынужденного перехода на режим самоизоляции в связи с пандемией коронавируса, начавшейся в 2020 году. Вузы перешли на дистанционное и, при необходимости очных практик, смешанное (гибридное) обучение. Дистанционная работа со студентами заочного отделения налажена давно и постоянно модифицируется благодаря появлению и непрерывному развитию электронных средств обучения. Плюсы и минусы дистанционного образования достаточно много и детально обсуждаются в средствах массовой информации [1, 2].

Для корректности изложения материала остановимся на терминологии, связанной с формой дистанционных занятий со студентами очного отделения вузов. Эта форма в отличие от занятий со студентами заочного

отделения часто называется онлайн-обучение, что означает получение знаний в режиме «здесь и сейчас» при помощи компьютера или гаджета, подключенных к интернету [3]. То есть перевод студентов очного отделения на дистанционное обучение не означает перевод на заочное обучение. Студенты также по расписанию приходят на занятия, только не в вуз, а в нашем случае на платформу Teams.

Организация процесса обучения прежде всего связана с четким определением его целей, осознанием и принятием их учащимися. Очевидно, что при переходе на режим онлайн основные цели обучения [4] не изменяются вообще, а процесс существенно. Резкий переход от обучения офлайн к онлайн не мог быть легким и безболезненным как для преподавателей, так и для студентов (как и для общества в целом). Тем не менее, к настоящему времени преподавателями вузов накоплен некоторый опыт работы в сложившихся условиях, и наступила пора делиться этим опытом.

В статье мы остановимся в основном на одной детали учебного процесса – тестировании. Нравится нам это или нет, но тестирование со всеми его достоинствами и недостатками прочно вошло в нашу жизнь, во все сферы деятельности человека. А в онлайн-обучении оно несомненно станет составной частью рабочего процесса как одна из форм контроля и обучения. Обсуждение этого вопроса продолжим после рассмотрения организации автором процесса онлайн-обучения по математике на одном из потоков Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ). Это поток студентов 2-го курса, который неожиданно возник у автора за несколько дней до начала 3-го семестра. Второй семестр они обучались один месяц очно и два с половиной дистанционно у другого преподавателя. Формой отчетности за второй семестр был зачет, который фактически состоял в защите онлайн расчетно-графической работы (РГР). Материал второго семестра – комплексные числа, дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных и интегральное исчисление функции одной переменной. Фактически это базовые разделы для работы в третьем семестре.

Положительным фактом в третьем семестре явилось то, что занятия на всех потоках очного отделения начались офлайн. И все преподаватели успели познакомиться со своими студентами. Автором за это время была прочитана значительная часть материала по разделу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Оставались еще два раздела «Интегралы по мере и элементы теории поля» и «Ряды».

В предчувствии, что переход на онлайн-обучение неизбежен, автором на первой же лекции были сформулированы четкие требования на весь период обучения, адаптированные к дистанционной форме обучения. Задание для РГР было разделено на три части соответственно изучаемым

разделах и выложено в Teams с указанием конкретных сроков сдачи (примерно через неделю после окончания изучения раздела). По каждому разделу предполагались контрольные работы по теории и практике при очном обучении или тестирование при дистанционном. При этом было объявлено, что к контрольным и тестированию по разделу допускаются только студенты, выполнившие соответствующую часть РГР. Заблаговременно в Teams выкладываются вопросы для подготовки к контрольным по теории, образцы контрольных по практике или образцы тестов для подготовки к тестированию. Кроме того, были сформулированы условия, при которых студент может быть освобожден от экзамена с оценкой «удовлетворительно» или «хорошо». На «отлично» или на повышение предложенной оценки надо сдавать экзамен. В результате переход на онлайн-обучение произошел спокойно и плавно. Забегая вперед, могу сказать, что весь процесс обучения проходил вполне удовлетворительно. Студенты очень старались, объяснив это впоследствии четким планированием работы и наличием мотивации.

Следует отметить, что надежда автора на то, что в интернете найдется огромное количество тестов, которыми можно будет воспользоваться, не оправдалась. Часть найденных тестов были просто низкого качества, в частности, и по правильности составления, и по корректности. Другая часть, как и банк приличных кафедральных тестов [5], не соответствовала конкретным целям и задачам, которые возникали в процессе работы со студентами. Например, вдруг выяснялось, что многие плохо вычисляют частные производные или интегралы, затрудняются найти модуль вектора или пользоваться комплексными числами, и т.д. Приходилось включать эти элементы в тестовые задания, в чем и заключалась роль тестов как обучающей составляющей процесса. Все это делалось открыто: объявлялось, на что надо обращать внимание при подготовке к тестированию, корректировались образцы тестов. Самым неожиданным для автора оказалось то, что студенты вместе с таблицей ответов стали присылать на проверку и свои решения, чтобы в случае необходимости можно было объяснить их ошибку. Это также стало обучающей составляющей тестирования и, кроме того, оказалось полезным автору для проверки правильности своих ответов.

Подробно остановлюсь на первом тестировании по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения», проводимом уже в период онлайн-обучения. Тесты были составлены следующим образом: два задания на определение типа дифференциального уравнения; три задания на дифференциальные уравнения 1-го порядка (одно на общее решение, два на решение задачи Коши с ответами в закрытой и открытой формах); три на линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

ПРИМЕР ТЕСТА

1. Дифференциальное уравнение $e^y dx + (2y + xe^y) dy = 0$ является уравнением

- 1) с разделяющимися переменными; 2) линейным; 3) Бернулли;
4) однородным; 5) в полных дифференциалах

2. Дифференциальное уравнение $y' = \frac{y + \sqrt{xy}}{x}$ является уравнением

двух типов:

- 1) с разделяющимися переменными; 2) линейным; 3) Бернулли;
4) однородным; 5) в полных дифференциалах.

3. Решением дифференциального уравнения $xu' = y + 1$ с начальным условием $y(1) = 2$ является функция:

- 1) $y = x + 1$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 3x - 1$; 4) другая.

4. Общий интеграл дифференциального уравнения $(3x - 4) \cos 4y dy - dx = 0$ имеет вид

- 1) $3 \sin 4y - 4 \ln |3x - 4| + C = 0$; 2) $\frac{1}{4} \sin 4y - \ln |3x - 4| + C = 0$;
3) $\sin 4y - \ln |3x - 4| + C = 0$.

5. Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка на графике решения задачи Коши для уравнения $y' = \frac{y^2}{x^3}$, $y(1) = 2$ и $x_0 = 2$, то y_0 равно...

6. Общим решением дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$ является функция

- 1) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; 2) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; 3) $y(x) = C_1 + C_2 e^{4x}$.

7. Частным решением уравнения $y'' - 4y' = 4e^x$ является функция

- 1) $y = 4e^x$; 2) $y = Ae^x$; 3) $y = 4xe^x$; 4) $y = -\frac{4}{3}e^x$.

8. Если корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = -2$, то ЛОДУ имеет вид

- 1) $y'' + y' - 2 = 0$; 2) $y''' + y' - 2y = 0$; 3) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$; 4) другой.

К назначенному времени только 80% студентов выполнили первую часть РГР, они и были допущены к тестированию.

Таблица 1. Итоги тестирования

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Доля верных ответов, %	41	38	66	66	47	88	59	84

Из табл. 1 следует, что хуже всего студенты могут определять тип дифференциального уравнения первого порядка и решать задачу 5 с открытой формой ответа, где приходится и делить переменные, и правильно вычислять интеграл. Вообще уравнения 1-го порядка решают хуже, чем линейные уравнения с постоянными коэффициентами, особенно однородные. Но это было всегда, неожиданностей не было.

Кроме вышеизложенного, этот тест вместе с занятиями и проверкой РГР позволил лучше узнать студентов, их отношение к учебе, грамотность, работоспособность, возможности, пробелы в знаниях и умениях. К тому же, как отмечают и другие преподаватели, вынужденная самоизоляция позволила студентам больше рассчитывать на наше внимание и время, а следовательно, на помощь в выработке привычки к самообразованию.

В табл. 2 приведены данные по оценке тестируемых. В соответствии с объявленными критериями оценивания результатов оценку «неудовлетворительно» получили 25% тестируемых, «удовлетворительно» - 32 %, «хорошо» - 40% и «отлично» - 3%.

Таблица 2. Оценки за выполнение тестов

Количество задач	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Доля решивших, %	3	10	6	6	16	16	22	18	3
Оценка в баллах	2	2	2	2	3	3	4	4	5

На выполнение тестовых заданий было отведено 25 минут от начала их ввода в Teams в виде вордовского файла до момента отправки студентом ответа. То есть на решение оставалось примерно 20 минут. Слежения за работой студентов при тестировании не предусмотрено, но по результатам и присланным решениям списывания замечено не было. Как объясни-

ли студенты, мало было времени, чтобы заниматься пересылкой или заказывать в интернете, а приглашать специалиста невыгодно.

Полученный опыт был учтен при дальнейшем составлении тестов: время выполнения было сохранено, количество заданий уменьшено, но увеличена доля достаточно трудоемких заданий с открытой формой ответа.

В заключение хочется отметить, что к экзаменационной сессии без долгов подошли те же 80% студентов, которые были допущены к первому тестированию, несмотря на то что некоторые из них по причине заболеваний на какой-то период выбывали из строя. И, как отмечают большинство преподавателей, онлайн хорошо учатся те же, что и офлайн.

И некоторые выводы об онлайн-обучении и тестировании.

- Цели образования зависят от правильного ответа на вопросы: для чего, чему и как учить. Этого никто и никогда не знал. Тем более сейчас. Но то, что главное для современного человека – научиться учиться и любить этот процесс, вряд ли кто опровергнет. Помочь в этом студентам – одна из основных наших задач. И онлайн-обучение в руках хорошего педагога этому способствует.

- Может быть, перейти тогда на онлайн-обучение? Конечно же, нет! Образование – это не только процесс получения знаний и навыков. Обучение в вузе – важный этап в формировании личности, создание круга общения, приобретение навыков работы в коллективе и т.д. Онлайн-обучение этого не дает. Кроме того, на данном этапе развития онлайн-обучения оно вряд ли годится для подготовки научных кадров и занятия научной деятельностью, по крайней мере, если речь идет о математике. Другое дело, когда человек работает, скажем, на предприятии, и ему надо повысить квалификацию. Однако приобретенный опыт работы, в частности, краткосрочное тестирование (15–20 минут) при достаточном количестве компьютерных классов, можно использовать и при офлайн-обучении.

- Возникает большой вопрос о пользе чтения лекций онлайн таких предметов, как теоретическая механика, высшая математика, сопромат и т.д. Могут ли современные студенты слушать, воспринимать и понимать онлайн, да и офлайн, лекцию непрерывно в течение 1,5 часов? Эта проблема выходит за пределы данной статьи [6]. По крайней мере, опыт работы показал, что для успешного самообразования в настоящее время очень удобно использовать методику тьюторского сопровождения [7], чем фактически и занимались автор статьи и некоторые его коллеги.

- Положительное от работы в Teams – возможность использовать накопленный материал при работе в режиме офлайн: выкладывание заданий для РГР, методических разработок и прочих учебных материалов, тестирование с указанием времени, автоматическое сохранение всех результатов, индивидуальные и групповые консультации онлайн.

• Основные недостатки. Присланные для проверки работы в разделе задания удобно читать в формате .pdf и крайне неудобно отмечать ошибки, - надо писать рецензию. При этом невозможно использовать математические символы. Тестовые задания по математике практически невозможно заводить в раздел «Тесты», приходится создавать вордовские файлы с использованием MathType и микширование производить вручную. К сожалению, автору не удалось найти платформу, на которой можно реализовать все свои методические желания и возможности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плюсы и минусы онлайн-обучения в вузах: рассказывает декан факультета. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://bankstoday.net/last-articles/plyusy-i-minusy-onlajn-obucheniya-v-vuzah-rasskazyvaet-dekan-fakulteta>
2. Плюсы и минусы дистанционного обучения в вузах [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://zaochnik.ru/blog/pljusy-i-minusy-distantsionnogo-obucheniya-v-vuze/>
3. Чем отличается онлайн-обучение от дистанционного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://zen.yandex.ru/media/id/5e3b1a0ad86469218fd64905/chem-otlichaetsia-onlainobuchenie-ot-distancionnogo-obucheniia-5e8449e84dc6b06f644db03>
4. Цели и задачи процесса обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://lektcii.org/8-99660.html>
5. Оленикова Ю.К. Дифференциальные уравнения: особенности тестирования / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Труды XI международных Колмогоровских чтений: сб. ст. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013.- С.198-201.
6. Как научиться эффективно слушать лекцию [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://nsportal.ru/vuz/pedagogicheskie-nauki/library/2016/07/19/kak-nauchitsya-effektivno-slushat-lektsiyu>
7. Подготовка педагога к тьюторскому сопровождению обучающихся [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.sites.google.com/site/tutorsoprovogdenie/tema-2>

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 665.633.063.001.57

**М. С. Белинов¹, М. А. Червочкин¹, О. В. Вахромеева¹,
А. В. Павлов¹, В. В. Соловьев¹, В. В. Губич²**

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: belka0762@gmail.com, solovyovvv@ystu.ru

²ЗАО «Ярославские масла и смазки» (ЯРМиС)
Россия, г. Ярославль

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОМПАУНДИРОВАНИЯ БЕНЗИНОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭТИЛОВОГО СПИРТА, ПОЛУЧЕННОГО ИЗ БОРЩЕВИКА СОСНОВСКОГО

Автомобильный бензин является одним из самых сложных продуктов нефтепереработки, с точки зрения технологии производства. Добиться соответствия бензинов, выпускаемых на крупных нефтеперерабатывающих заводах (НПЗ) страны, требованиям нормативных документов можно за счет использования большого разнообразия компонентов в товарном продукте, количество которых в нем уже сегодня, как правило, составляет не менее 6-8 наименований [1-3].

Ключевые слова: топливо, НПЗ, бензин, методика.

**M. S. Belinov¹, M. A. Chervochkin¹, O. V. Vakhrameeva¹,
A. V. Pavlov¹, V. V. Solovyov¹, V. V. Gubich²**

¹Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: belka0762@gmail.com, solovyovvv@ystu.ru

²CJSC "Yaroslavl Oils and Lubricants" (YOL)
Russia, Yaroslavl

MODELING OF THE GASOLINE COMPOUNDING PROCESS WITH THE USE OF ETHYL ALCOHOL OBTAINED FROM SOSNOVSKY HOGWEED

Automobile gasoline is one of the most complex products of oil refining, in terms of production technology. To achieve compliance with gasoline produced at major refineries (refinery) country regulatory requirements by using a large variety of components in commercial product whose number is it today, is usually at least 6-8 items [1-3].

Keywords: fuel, oil refinery, gasoline, methodology.

Если в западных странах традиционно наиболее востребованными компонентами бензинового пула являются продукты алкилирования [4], изомеризации [5], каталитического крекинга [6] и различные оксигенаты [7-10], то в отечественном топливе долгое время преобладал исключительно риформат [11], который, как известно, имеет высокое октановое число, но состоит преимущественно из ароматических соединений [12, 13]. Проблема загрязнения атмосферы продуктами сгорания такого топлива потребовала ввода ограничений на содержание наиболее опасных сернистых и ароматических соединений в отечественных бензинах. Ограничительные меры были закреплены в Техническом регламенте, вступившим в силу 1 января 2014 года [14], согласно которому в Российской Федерации с 2016 года должно производиться моторное топливо для двигателей с искровым зажиганием, соответствующее 5-му экологическому классу [15]. Начиная с 2021 года, экологический класс топлив должен быть повышен до 6-го, внедрение которого потребует качественного изменения компонентного состава отечественных автобензинов [16,17]. По мнению авторов настоящей работы, технически это возможно за счет модернизации производства, а именно внедрения на НПЗ современных технологических процессов. Безусловно, строительство новых установок требует значительных инвестиций, найти которые в непростой экономической ситуации последствий коронавирусной инфекции будет затруднительно. Поэтому большинство предприятий пока сосредоточились на проектировании и вводе мощностей гидрооблагораживающих процессов, не инвестируя при этом в развитие углубляющих [1-4]. В таких условиях растущие потребности отечественного рынка бензина пока будут покрываться за счет увеличения объемов переработки сырья [11, 12, 18]. Ситуация также осложняется в связи с запретом на использование в бензинах 5-го класса присадок на основе монометиланилина, весьма популярных среди производителей автомобильных бензинов [14, 19]. В таких условиях производство высокооктановых бензинов 6-го класса без использования новых видов кислородсодержащих добавок-оксигенатов практически невозможно [20, 21]. Между тем перед нефтяными компаниями страны на ближайшие годы стоят непростые задачи: первостепенная – удовлетворение спроса на бензин на внутреннем рынке, и весьма амбициозная - наращивание объема экспортируемого топлива. Логичным способом повышения выработки бензина в условиях недостаточной технической оснащенности и ужесточения экологических требований является поиск новых октаноповышающих добавок [22, 21]. Вторым перспективным направлением развития процессов получения качественных бензинов видится поиск рациональных подходов к их компаундированию, а именно:

- совместному использованию новых для Российской Федерации

оксигенатов и присадок по сравнению с традиционно применяемым метил-третично-бутиловым эфиром (МТБЭ) для обеспечения синергетического эффекта;

- подбор оптимального группового химического состава бензинов, обеспечивающего максимальную эффективность октаноповышающих добавок на основе этилового, изопропилового, изобутилового спиртов, диизопропилового эфира и др.;

- разработка рецептур товарных бензинов на основе математических моделей смешения традиционно выпускаемых топлив, учитывающий химический состав уже производимых базовых компонентов моторных топлив для двигателей с искровым зажиганием с добавками новых видов оксигенатов [24, 25].

В настоящее время хорошо известны методики нахождения оптимального варианта компаундирования автобензинов с использованием кислородсодержащего антидетонатора метил-третично-бутилового эфира (МТБЭ) на ряде нефтеперерабатывающих предприятий Российской Федерации, включая и Ярославский НПЗ (ПАО «Славнефть-ЯНОС») [26, 27]. На их основе составлены и успешно эксплуатируются на различных НПЗ автоматизированные программы расчета на ЭВМ, позволяющие оптимизировать распределение основных углеводородных составляющих и кислородсодержащего компонента по товарным сортам бензина (АИ-92, АИ-95, АИ-98) с учетом различных технологических и экономических ограничений.

Однако в связи с ужесточением экологических требований к бензинам и перехода в ближайшем будущем ряда предприятий на выпуск топлива для двигателей с искровым зажиганием по стандартам ЕВРО-4, ЕВРО-5 и выше могут возникнуть серьезные затруднения в процессе компаундирования базовых углеводородных компонентов с кислородсодержащим соединением, выпускаемых сегодня на предприятии ПАО «Славнефть-ЯНОС». К тому же при введении норм и требований, регламентирующих переход отечественных НПЗ на выпуск бензинов выше ЕВРО-5, по ряду предприятий рекомендуется вместо МТБЭ использовать этил- или изоамилтретбутиловый эфир, диизопропиловый эфир, а также этиловый спирт в качестве кислородсодержащих добавок.

С введением в ближайшей перспективе на Ярославском НПЗ установки коксования тяжелых нефтяных углеводородов, а также установки пиролиза нефтяных фракций, предприятие будет обеспечено высокочистым этиленом, на основе которого возможен выпуск этилового спирта или этил-трет-бутилового эфира (ЭТБЭ). В этом случае возникает необходимость применения этилового спирта или ЭТБЭ для увеличения выпуска высокооктановых бензинов. Однако режимы смешения таких кислородсо-

держащих соединений с базовыми компонентами бензинов, состав которых представлен только углеводородными составляющими до настоящего времени на большинстве НПЗ Российской Федерации, включая и предприятие ПАО «Славнефть-ЯНОС», не отработаны.

В настоящей работе рассматривается вариант моделирования процесса компаундирования бензинов с применением этилового спирта, полученного как по традиционной технологии прямой гидратации этилена [28,29], так и по технологии, разработанной в Ярославском государственном техническом университете (ЯГТУ) [30, 32]. Технология получения этилового спирта из борщевика Сосновского – экологически вредного растения и потенциального загрязнителя сельскохозяйственных территорий Российской Федерации – уже отработана в опытно-лабораторном масштабе в ЯГТУ и представлена в работах [33, 34].

В настоящее время на Ярославском НПЗ выпускаются товарные автомобильные бензины: АИ-92, АИ-95, АИ-98 с добавлением в сложную углеводородную смесь, поступающую с установок АВТ и ГФУ, каталитического крекинга и трех установок риформинга, установки алкилирования и изомеризации, а также с процесса гидрокрекинга метил-третично-бутилового эфира в соответствии с действующим ГОСТом (соответствующего количества МТБЭ) от 5 % мас. и выше.

Для решения задачи оптимального компаундирования традиционно выпускаемых бензинов с (добавками) применением этилового спирта должно быть известно следующее:

- приемистость к этиловому спирту различных компонентов бензина;
- аддитивность распределения этилового спирта (этанола) в смеси компонентов;
- характер зависимости показателя приемистости к этиловому спирту данного компонента в смеси с другими компонентами;
- влияние присадки этилового спирта на соотношение между октановым числом по исследовательскому и по моторному методам для отдельных компонентов и для их смесей, а также влияние примесей соединений серы на октановое число бензинов при добавке этилового спирта.

Сложность поставленной задачи, заключалась в отсутствии точных и достоверных данных об отдельных показателях различных углеводородных компонентов товарных бензинов, поступающих с установок вторичной переработки нефти Ярославского НПЗ в цех смешения. При выполнении настоящих исследований коллективу авторов помогал аналитический отдел научно-исследовательской лаборатории ЗАО «Ярославские масла и смазки» (ЗАО «ЯРМиС»), сотрудникам которой авторы выражают глубокую благодарность за выполненную работу. Однако даже аналитический отдел ЗАО «ЯРМиС» в полном объеме не успел осуществить ряд необхо-

димых анализов углеводородных смесей для приготовления различных марок товарных бензинов из-за введения ограничения работы сотрудников в период пандемии 2020 года. В этой связи было предложено смоделировать процесс компаундирования товарных бензинов с этиловым спиртом.

Предварительными исследованиями было установлено, что основные зависимости процесса смешения товарных бензинов существенным образом зависят от величины добавки этилового спирта.

В то же время было показано, что расчет этих зависимостей можно осуществить путем математического моделирования только на основании имеющихся в распоряжении авторов экспериментальных данных, полученных при исследовании бензинов данного НПЗ. Однако из-за введения ограничений по выполнению практических и аналитических работ во время пандемии объем выполненных исследований ЗАО «ЯМиС» в этом направлении не позволил осуществить их в короткие сроки и получить результаты для полной оптимизации процесса компаундирования нефтяных бензинов и этилового спирта.

По этой причине на основании полученных ограниченных данных было установлено, что строгая постановка оптимизационной задачи компаундирования автомобильных бензинов с этиловым спиртом приводит к нелинейной модели, для решения которой пока не существует эффективных алгоритмов. Тем не менее, переход в будущем Ярославского НПЗ на оптимальное планирование ассортимента выпуска автобензинов с добавками этилового спирта (как один из вариантов технологического процесса) требует скорейшего решения возникшей проблемы.

Предварительный анализ полученных экспериментальных данных показал, что для выполнения поставленной задачи необходимо сделать некоторые предварительные замечания. На НПЗ «Славнефть-ЯНОС» низкооктановые компоненты подаются в товарный цех несколькими потоками, среднее октановое число которых составляет от 80 до 90 пунктов. Смесь этих компонентов в первом приближении соответствует бензину АИ 82-85. Для того чтобы на их основе получить бензины АИ-92, АИ-95, АИ-98 и выше, необходимы добавки соответствующих компонентов, производимых на Ярославском НПЗ или закупаемых заводом у сторонних организаций. При добавке этилового спирта, который сегодня также придется приобретать у соответствующих производителей, все определяется экономической целесообразностью реализации данного предложения. Разница в отпускной цене бензинов на основе МТБЭ и при добавке этилового спирта по ориентировочным расчетам составляет 2-5 руб. Следовательно, добавка спирта увеличит объем реализации на 3-4 руб. в расчете на 1 литр товарного автомобильного бензина. В то же время затраты на этиловый спирт, производимый из борщевика Сосновского, по предварительным (скромным)

подсчетах составят 20-22 рубля (спирт на основе этилена 25-30 рублей).

Таким образом, при существующем соотношении цен выпуск бензина АИ 92 на ПАО «Славнефть-ЯНОС» с добавкой этилового спирта на момент публикации материалов статьи экономически невыгоден, так как затраты на этанол выше, чем дополнительный эффект от реализации низкооктанового бензина. Иная картина наблюдается при выпуске бензинов АИ-95 или АИ-98, так как цена на эти топлива выше, а расход спирта для повышения октанового числа не столь значителен. Это связано с тем, что этанол имеет наиболее высокое октановое число из всех известных спиртов (более 120 пунктов по исследовательскому методу). В то же время имеющиеся данные о приемистости бензинов к этиловому спирту [9, 20, 25] показывают, что добавка к бензину АИ-92 этанола в количестве 5-10 объемных или 4-8 массовых процентов достаточна для перевода его в АИ-95 или АИ-98. Разница в отпускных ценах на эти бензины для условий Ярославского НПЗ составляет около 4 руб./л. Следовательно, затрачивая 20–22 рубля (стоимость этанола из борщевика) или 25-30 рублей (спирт на основе этилена), завод получает дополнительно 4000 руб. прибыли на 1 т бензина.

На основании изложенного авторами была разработана и проверена модель введения этилового спирта в различные марки товарных бензинов (АИ-92 и АИ-95) как один из вариантов технологического процесса.

Алгоритм указанной задачи состоит из двух частей. В первой – решается модель компаундирования с одним из возможных критериев оптимизации [26, 27], в качестве которого целесообразно принимать минимум выпуска базового бензина (в данном случае АИ-92). При этом задача должна решаться без ограничений по плану выпуска остальных бензинов.

В результате определяется оптимальный ассортимент товарных бензинов $W_1, W_2, \dots, W_j, \dots, W_n$. Эти данные являются исходными для второй части алгоритма, задача в которой формулируется следующим образом:

– на основании данных оптимизационного расчета необходимо определить оптимальное количество используемого этилового спирта с учетом ограничений по плану выпуска тех или иных товарных бензинов и ресурсов у конкретного предприятия собственно производимого этилового спирта или закупаемого им у сторонних поставщиков.

Для этого были введены (введем) следующие условные обозначения:

P_j – ограничение по выпуску j -го сорта товарного бензина (АИ-92), т;

X_j – количество j -го бензина, в который вводится этиловый спирт, т;

n – количество товарных бензинов;

z_j – цена товарного бензина, руб./т;

δ_j – прибавка этилового спирта к j -му бензину, необходимая для перевода его в $(j+1)$ -й сорт бензина, л/т;

z_3 – стоимость этилового спирта (получаемого на основе собственного сырья – этилена), руб./т;

\mathcal{E} – требуемый общий запас (ресурсы) этилового спирта, т.

Тогда модель задачи можно записать следующим образом:

1. Уравнение ограничения по запасу j -го бензина:

$$x_j \leq W_j; \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

2. Уравнение ограничения по запасу этилового спирта:

$$\sum_{j=1}^{j=n-1} \delta_j x_j \leq \mathcal{E}. \quad (2)$$

3. Уравнение ограничения по плану выпуска товарных бензинов:

$$\text{- для } j = 1, \quad W_1 - x_1 \geq p_1, \quad (3a)$$

$$\text{- для } j \neq 1 \text{ и } j \neq n, \quad W_j - x_j + x_{j-1} \geq P_j, \quad (3б)$$

$$\text{- для } j = n, \quad W_n - x_{n-1} \geq p_n. \quad (3в)$$

Функция цели (максимум прибыли):

$$f_3 = (W_1 - x_1)Z_1 + \sum_{j=2}^{j=n} (W_j - x_j + x_{j-1})Z_j + (W_n - x_{n-1})Z_n - Z_3 \sum_{j=1}^{j=n} \delta_j x_j.$$

После преобразований получаем дополнительную прибыль от добавки этилового спирта собственного производства (этилирования):

$$\Delta f_3 = \sum_{j=1}^{n-1} x_j (Z_{j+1} - Z_j - Z_3 \delta_j), \quad \text{при } \max \Delta f_3.$$

Решая приведенную модель обычным методом линейного программирования, можно определить оптимальный план выпуска бензинов с добавкой этилового спирта и бензинов с традиционной добавкой (МТБЭ) с учетом наличных ресурсов этилового спирта собственного производства. Предварительно нужно рассчитать оптимальный вариант смешения компонентов без учета введения этилового спирта или добавки МТБЭ.

Для решения задач подобного рода экспериментально-статистическим методом было предложено определить значение δ_j , которое отвечало бы за количество этилового спирта, необходимое для перевода базового j -го бензина в товарный (АИ-92) $(j+1)$ -й бензин, (например АИ 80-90 в АИ-92).

Следует отметить, что для решения плановых задач не обязательно знать точное значение δ_j , рассчитанное по данным о приемистости к этиловому спирту. Эта трудоемкая экспериментальная работа должна быть обязательно выполнена при переходе к оптимальному оперативному компаундированию с использованием этилового спирта. В текущем планировании достаточно знать величину δ_j , минимально необходимую для получения нужного октанового числа бензинов с добавкой этанола с заданной вероятностью. Чтобы ее определить, достаточно произвести ограниченное число экспериментов с добавлением этилового спирта в выпускаемые на конкретном предприятии различные марки бензинов.

Таким образом, приведенная выше модель задачи введения этилового спирта в моторные топлива позволяет определить минимально необходимые ресурсы этанола для выполнения плана по ассортименту высокооктановых бензинов при заданном наборе компонентов. Авторами были также получены результаты, которые могут быть использованы в любой заводской практике компаундирования, а также при работе малых топливных компаний и предприятий. При этом стадия смешения композиции альтернативного автомобильного топлива может осуществляться на заводе, производящем этиловый спирт, на нефтеперерабатывающем предприятии или на отдельном малом предприятии, имеющем необходимое оборудование (терминал смешения). Базовый углеводородный компонент может готовиться непосредственно на предприятии, осуществляющем производство альтернативного автомобильного топлива, или же на нефтеперерабатывающем заводе и поставляться в готовом виде для последующего смешения с этиловым спиртом.

Себестоимость предлагаемой топливной композиции может быть дополнительно снижена за счет использования дешевых прямогонных бензиновых фракций (в том числе бензина газового стабильного, пентановой, изопентановой и гексановой фракций), а также побочных продуктов производства этилового спирта (биоэтанола).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карнов С.А.* Современные аспекты производства автомобильных бензинов в России // Технологии нефти и газа. 2006. №4. С. 3-8.
2. *Магарил Э.* Повышение эффективности и экологической безопасности эксплуатации транспортных средств за счет улучшения качества топлива // Междунар. журн. устойчивого развития и планирования. 2015. № 10.6. С. 880-893.
3. *Емельянов В.Е.* Производство автомобильных бензинов. М.: Изд-во «Техника», ТУМА ГРУПП, 2008. 192 с.
4. *Капустин В.М.* Нефтеперерабатывающая промышленность США и бывшего СССР / В.М. Капустин, С.Г. Кукус, Р.Г. Бертолусини. М.: Химия, 1995. 300 с.

5. *Боруцкий П.Н.* Каталитические процессы изомеризации и дегидрирования углеводородов для производства изокомпонентов бензинов // Катализ в промышленности. 2003. №2. С. 86-88.
6. *Balabin R.M.* Molar enthalpy of vaporization of ethanol-gasoline mixtures and their colloid state / R.M. Balabin, R.Z. Syunyaev, S.A. Karpov // FUEL. The science and technology of Fuel and Energy. 2007. №86(3). P. 323-327.
7. *Карпов С.А.* Актуальные аспекты производства топливного этанола в России и США [Электронный ресурс] // Электрон. науч. журн. «Нефтегазовое дело». 2006. №2. Режим доступа: <http://www.ogbus.ru>.
8. *Tsarev A.V.* Increase of the Environmental and Operational Characteristics of Automobile Gasolines with the Introduction of Oxygenates / A.V. Tsarev, S.A. Karpov // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2009. Vol. 43, No. 4. P. 563-567.
9. *Онойченко С.Н.* Применение оксигенатов при производстве перспективных автомобильных бензинов. М.: Изд-во «Техника», ТУМА ГРУПП, 2003. 64 с.
10. Рынок МТБЭ в России: Отраслевой обзор / Академия Конъюнктуры Промышленных Рынков. М., 2010. 76 с.
11. *Баннов П.Г.* Процессы переработки нефти. М.: КолосС, 2003. 98 с.
12. *Глаголева О.Ф.* Технология переработки нефти. Часть первая / О.Ф. Глаголева, В.М. Капустин. М.: Химия, КолосС, 2007. 400 с.
13. *Капустин В.М.* Технология переработки нефти. Часть 2. Деструктивные процессы / В.М. Капустин, А.А. Гуреев. М.: КолосС, 2007. 400 с.
14. Постановление Правительства РФ от 27 февраля 2008 г. № 118 «Об утверждении технического регламента «О требованиях к автомобильному и авиационному бензину, дизельному и судовому топливу, топливу для реактивных двигателей и топочному мазуту»» [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.gost.ru>.
15. ГОСТ Р 51866-2002 «Топлива моторные. Бензин неэтилированный. Технические условия
16. Новые топливные стандарты и перспективы производства высокооктановых бензинов в России [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.topreg.ru>.
17. *Капустин В.М.* Проблемы повышения качества российских бензинов // Химия и технология топлив и масел. 2005. №2. С. 13-15.
18. *Карпов С.А.* Автомобильные бензины с улучшенными экологическими свойствами // Экология и промышленность России. 2006. Январь С. 30-32.
19. ГОСТ Р 51105-97 «Топлива для двигателей внутреннего сгорания. Неэтилированный бензин. Технические условия
20. *Капустин В.М.* Оксигенаты в автомобильных бензинах. М.: КолосС, 2011. 335 с.
21. *Рассказчикова Т.В.* Этанол как высокооктановая добавка к бензинам. Производство и применение в России и за рубежом / Т.В. Рассказчикова, В.М. Капустин, С.А. Карпов // Химия и технология топлив и масел. 2004. №4. С. 3-7.
22. *Карпов С.А.* Развитие производства этанола как альтернативного источника автомобильных топлив [Электронный ресурс] // Электрон. науч. журн. «Нефтегазовое дело». 2007. №1. Режим доступа: <http://www.ogbus.ru>.
23. *Рассказчикова Т.В.* Проблемы и перспективы использования этанола в качестве октаноповышающей добавки / Т.В. Рассказчикова, С.А. Карпов // Молодежная

- наука - нефтегазовому комплексу: сб. материалов науч. конф. Москва, март 2004 г. М.: ООО «Интеграция», 2004. С. 25.
24. Капустин В.М. Возникновение и развитие производства топливного этанола / В.М. Капустин, С.А. Карпов // Нефтепереработка и нефтехимия. 2006. №10. С. 48-51.
 25. Карпов С.А. Применение алифатических спиртов в качестве экологически чистых добавок в автомобильные бензины [Электронный ресурс] / С.А. Карпов, Л.Х. Кунашев, А.В. Царев, В.М. Капустин // Электрон. науч. журн. «Нефтегазовое дело». 2006. №2. Режим доступа: <http://www.ogbus.ru>.
 26. Гартман Т.Н. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов / Т.Н. Гартман, Д.В. Клушин. М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. 416 с.
 27. Майер Р.В. Компьютерное моделирование [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://econf.rae.ru/article/6722ru>.
 28. Киртсис С. Новые более экологичные и продуктивные источники сырья для удовлетворения быстро растущих потребностей транспорта в биоэтаноле // Энергетический вестник. 2011. №1 (10). С. 9-29.
 29. Доржиев С.С. Биоэтанол из зеленой массы борщевика Сосновского / С.С. Доржиев, Е.Г. Базарова // Инновации в сельском хозяйстве. 2012. №2 (2). С. 10-16.
 30. Головков А.Е. Биомасса борщевика Сосновского – перспективная сырьевая база для биотопливной индустрии / А.Е. Головков, О.В. Вахромеева, С.В. Крапивина, В.В. Соловьев // Всерос. школа-конф. молодых ученых с междунар. участием «Фундаментальные науки – специалисту нового века». 20-24 апреля 2020 г., Иваново: сб. тез. докл. [Электронный ресурс]. Иваново: Изд-во ИГХТУ, 2020. С. 233
 31. Вахромеева О.В. Определение основных примесей, присутствующих в этиловом спирте, полученном из биомассы борщевика Сосновского / О.В. Вахромеева, М.С. Белинов, Е.Д. Кузнецова, В.В. Соловьев, А.В. Павлов, В.В. Губич // Химия и химическая технология: достижения и перспективы: Материалы V Всерос. конф. 26-27 ноября 2020 г., Кемерово [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева». Кемерово, 2020. С. 491-494.
 32. Белинов М.С. Исследование процесса очистки этилового спирта, полученного из борщевика Сосновского от сопутствующих примесей / М.С. Белинов, О.В. Вахромеева, Е.Д. Кузнецова, В.В. Соловьев, А.В. Павлов, В.В. Губич // Химия и химическая технология: достижения и перспективы. Материалы V Всерос. конф., 26-27 ноября 2020 г., Кемерово [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева. Кемерово, 2020. С. 471-475.
 31. Вахромеева О.В. Научные основы комплексной переработки биомассы борщевика Сосновского в этиловый спирт и биотопливо / А.Е. Головков, А.В. Павлов, В.В. Соловьев // Семьдесят третья всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием. 20 апреля 2020 г., Ярославль: сб. материалов конф. В 2 ч. Ч. 1 [Электронный ресурс]. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2020. С. 157-160.

УДК 51-74

А. В. Гусаров

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: alvgus@mail.ru

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА ОТРАЖЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ДВУХКООРДИНАТНОМ ДАТЧИКЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛУЧА

В статье рассматриваются усовершенствованная математическая модель, описывающая процесс распределения потока электронов, отраженных от поверхности расплавленного материала и попадающих на коллекторы электронов, расположенные в чувствительном элементе датчика положения электронного луча. В модели учтено влияние неупругого отражения электронов, возникающее в электронных пучках высокой плотности, а также зависимость позиционного сигнала от ускоряющего напряжения.

Ключевые слова: математическая модель, поток отраженных электронов, двухкоординатный датчик, ускоряющее напряжение.

A. V. Gusarov

P. A. Solovyov Rybinsk State University of Aviation Technology
Russia, Rybinsk, e-mail: alvgus@mail.ru

THE TWO-COORDINATE BEAM POSITION SENSOR MATHEMATICAL MODEL THE REFLECTED ELECTRONS FLUX DISTRIBUTION IN IMPROVING

The article considers an improved mathematical model describing the process of distribution of the flow of electrons reflected from the surface of the molten material and falling on the electron collectors located in the sensitive element of the electron beam position sensor. The model takes into account the effect of inelastic electron reflection occurring in high-density electron beams, as well as the dependence of the positional signal on the accelerating voltage.

Keywords: mathematical model, reflected electron flux, two-coordinate sensor, radiation pattern, accelerating voltage.

Одним из методов получения высококачественных покрытий и тонких пленок является их нанесение в вакууме путем электронно-лучевого испарения материала из водоохлаждаемого тигля. При этом важна ста-

бильность параметров процесса, которая во многом определяется стабильностью закона передачи энергии от испарителя в зону испарения (тигель). Для этого используется, в том числе, контроль положения электронного луча при помощи обработки сигнала с датчика потока отраженных электронов [1, 2].

Формула для расчета потока отраженных электронов I_k с поверхности фокального пятна электронного луча (рис. 1) через k -й коллектор отраженных электронов (k меняется от 1 до 4), в отличие от формулы, приведенной в [2], имеет вид

$$I_k = \sum_{i=1}^n K_1(x_S, y_S) \cdot K_2(x_S, y_S) \cdot (\varphi_{2S} - \varphi_{1S}) \cdot (\cos \theta_{1S} - \cos \theta_{2S}), \quad (1)$$

где n – количество элементарных площадок на поверхности фокального пятна S ;

φ_{2S} , φ_{1S} , θ_{2S} , θ_{1S} , – углы в системе полярных координат, определяющие положение элементарной площадки на коллекторе, достижимой отраженными электронами из элементарной площадки S [1]. Эти углы рассчитываются для каждой элементарной площадки S на поверхности фокального пятна электронного луча;

$K_1(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий параметры первичного луча и его взаимодействие с паровым потоком вблизи мишени;

$K_2(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий взаимодействие отраженных электронов с паровым потоком вблизи мишени.

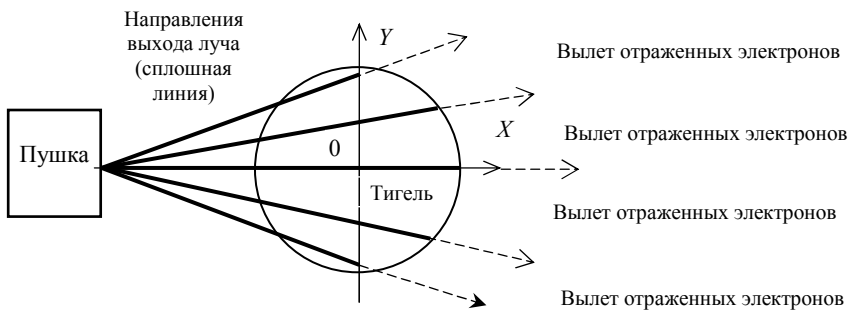


Рис. 1. Направления падения луча и вылета отраженных электронов (вид сверху)

В данной работе показано, что на характер взаимодействия отраженных электронов с паровым потоком вблизи мишени значительное влияние оказывают ток первичного луча и ускоряющее напряжение.

Значение $K_2(x_S, y_S)$ в [2] определяется по формуле

$$K_2(x_S, y_S) = K_{Angle}(x_S, y_S) \cdot K_{Rf}(x_S, y_S), \quad (2)$$

где $K_{Angle}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий изменение преобладающего угла вылета отраженных электронов вследствие перемещения вдоль оси Y (см. рис. 1);

$K_{Rf}(x_S, y_S)$ – коэффициент, учитывающий взаимодействие отраженных электронов с атомами парового потока [6].

Величина ускоряющего напряжения и сила тока, как показали эксперименты на электронно-лучевой установке УВН-75Р-1, может быть учтена путем введения коэффициентов K_{Ub} и K_{Ib} . Тогда

$$K_2(x_S, y_S) = K_{Angle}(x_S, y_S) \cdot K_{Rf}(x_S, y_S) \cdot K_{Ub} \cdot K_{Ib}, \quad (3)$$

где K_{Ub} – коэффициент, зависящий от величины ускоряющего напряжения U_b , $K_{Ub} = 0,001 \cdot (U_b + 0,0004 \cdot U_b^{1,5})$;

K_{Ib} – коэффициент, зависящий от величины тока электронного луча I_b , $K_{Ib} = 0,03 \cdot (I_b + 0,015 I_b^2)$.

Для моделирования положения электронного луча рассчитаем поток отраженных электронов через коллекторы и пронормируем полученные значения, получив позиционные сигналы I_{pX} и I_{pY} для координат X и Y соответственно (рис. 2).

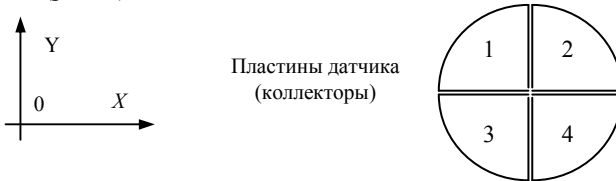


Рис. 2. Расположение коллекторов (вид сверху)

Закон изменения этих позиционных сигналов фактически моделирует закон изменения входного сигнала датчика положения электронного луча. Выражения для расчета позиционных сигналов I_{pX} и I_{pY} имеют вид:

$$I_{pX} = \frac{(I_1 + I_3) - (I_2 + I_4)}{(I_1 + I_3) + (I_2 + I_4)}, \quad (4)$$

$$I_{pY} = \frac{(I_1 + I_2) - (I_3 + I_4)}{(I_1 + I_2) + (I_3 + I_4)}, \quad (5)$$

где значения I_k рассчитываются по формуле (1) с учетом того, что величина $K_2(x_S, y_S)$ определяется с учетом выражения (3).

Зависимости, рассчитанные по выражениям (4) и (5), приведены на рис. 3–8.

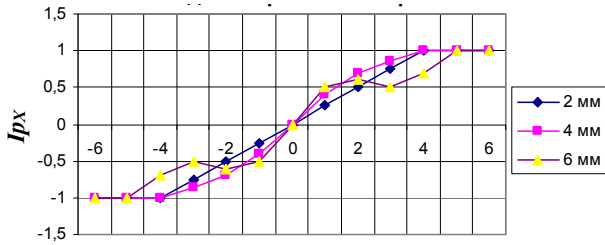


Рис. 3. Зависимость позиционного сигнала I_{px} от диаметра коллекторов

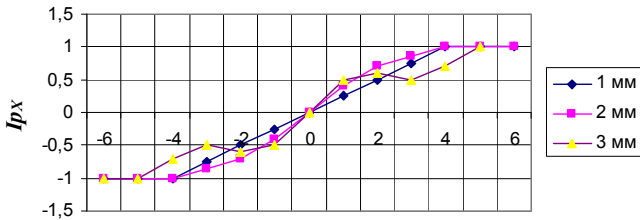


Рис. 4. Зависимость позиционного сигнала I_{px} от расстояния между коллекторами

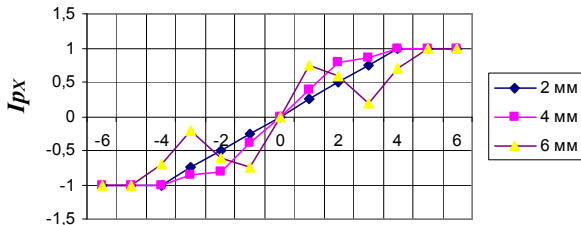


Рис. 5. Зависимость позиционного сигнала I_{px} от диаметра диафрагмы (см. [2] рис. 1)

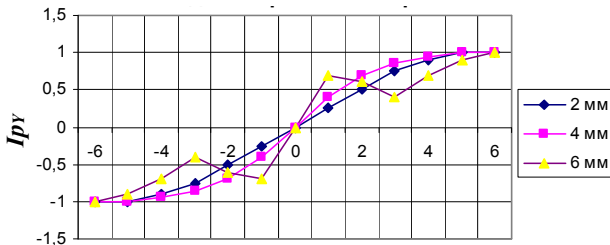


Рис. 6. Зависимость позиционного сигнала I_{py} от диаметра коллекторов

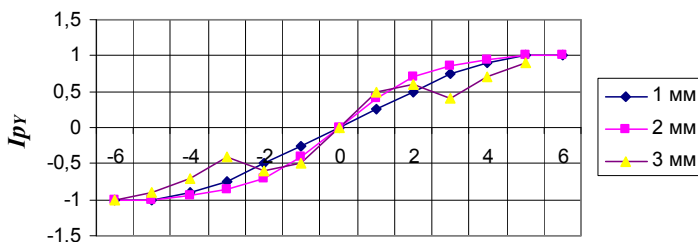


Рис. 7. Зависимость позиционного сигнала I_{py} от расстояния между коллекторами

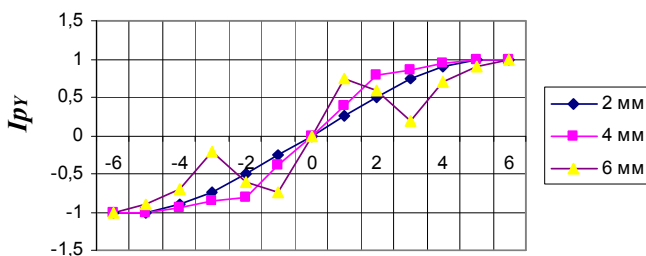


Рис. 8. Зависимость позиционного сигнала I_{py} от диаметра диафрагмы (см. [2] рис. 1)

В процессе математического моделирования потока отраженных электронов с поверхности фокального пятна электронного луча было получено устойчивое совпадение моделируемых характеристик датчика положения луча с экспериментальными результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусаров А.В. Совершенство математической модели распределения потока отраженных электронов / А. В. Гусаров, Н. И. Гусарова // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2019. С. 138–144.
2. Гусаров А.В. Математическая модель распределения потока отраженных электронов в двухкоординатном датчике положения // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2020. С. 147–151.

УДК 51:004.04

Г. А. Зубков

Главный испытательный космический центр
Министерства обороны Российской Федерации им. Г.С. Титова
Россия, Московская область, Краснознаменск,
e-mail: GeorgyZubkov@mail.ru

**МЕТОД ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА
МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Статья посвящена разработке метода выбора и настройки алгоритма машинного обучения, который решает задачу прогнозирования технического состояния космического аппарата. Актуальность прогнозирования состояния космических аппаратов обусловлена возрастающим уровнем сложности выполняемых задач сектором анализа центра управления полётом. Описанный в статье метод был применен к обработанному набору телеметрической информации, который представляет собой множество векторов состояния бортовой аппаратуры космических аппаратов.

***Ключевые слова:** нейронная сеть, машинное обучение, космический аппарат, орбитальная группировка, гиперпараметры.*

G. A. Zubkov

G.S. Titov Main Test Space Center of the Ministry
of Defense of the Russian Federation
Russia, Moscow region, Krasnoznamensk, *e-mail: GeorgyZubkov@mail.ru*

**METHOD FOR SELECTING AND ADJUSTING
A MACHINE LEARNING ALGORITHM FOR SOLVING
THE PROBLEMS OF FORECASTING THE TECHNICAL
STATE OF SPACE VEHICLES**

The article is devoted to the development of a method for selecting and tuning a machine learning algorithm that solves the problem of predicting the technical state of a spacecraft. The relevance of predicting the state of spacecraft is due to the increasing level of complexity of the tasks performed by the analysis sector of the mission control center. The method described in the article was applied to the processed set of telemetric information, which is a set of vectors of the state of the onboard equipment of spacecraft.

***Keywords:** neural network, machine learning, spacecraft, orbital constellation, hyperparameters.*

Введение. Одной из решаемых задач в машинном обучении является задача «обучения с учителем», целью которого является обучение по ранее проведенным экспериментам, примерам. Алгоритмы «обучения с учителем», в общем случае, делятся на алгоритмы классификации и регрессии.

При решении задач классификации, алгоритм должен дать ответ, к какой из k категорий принадлежит измерение. Для решения данной задачи алгоритм обучения должен породить некую функцию

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, \dots, k\} . \quad (1)$$

Примером такой задачи является определение срока активного существования (в годах), категории изделия по состоянию бортовой аппаратуры космического аппарата. В задаче же регрессии алгоритму необходимо спрогнозировать временной ряд. Для её решения алгоритму необходимо породить некую функцию

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} . \quad (2)$$

Целью проведенного исследования является разработка метода, позволяющего оптимизировать процесс выбора наилучшего алгоритма машинного обучения для решения конкретной задачи прогнозирования. В ходе исследования был подготовлен обработанный набор телеметрической информации для обучения нейронной сети прямого распространения. Впоследствии была проведена оптимизация гиперпараметров и обучение различных алгоритмов машинного обучения. В итоге было проведено сравнение времени поиска оптимального алгоритма с применением метода и без него. Время поиска оптимального алгоритма при использовании метода показало меньший результат.

Материалы исследования. Рассматриваемый метод состоит из структурной программной подготовки телеметрической информации, определении алгоритма, который зависит от выполнения задачи и обучения алгоритма, поиске оптимальных гиперпараметров алгоритма и его обучении на наборе телеметрической информации. Результатом выполнения данных условий является оптимизация процесса нахождения оптимального алгоритма машинного обучения. Рассматриваемый метод изображен на рис. 1.

На вход поступает телеметрическая информация, полученная с борта космического аппарата при помощи средств наземного комплекса управления. После получения данных необходимо провести комплексную обработку телеметрической информации, состоящую из обработки выбросов в данных, обработки пропусков в телеметрической информации, кодировании признаков и нормализации всего набора телеметрии.

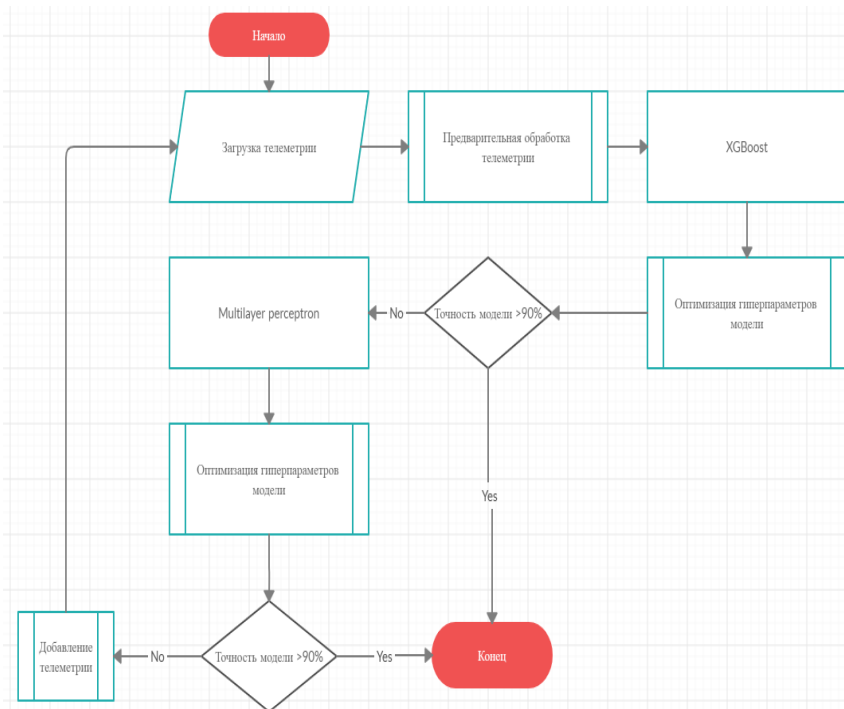


Рис. 1. Метод поиска оптимального алгоритма машинного обучения

Задачу определения аномальных значений решают путём проведения процедуры обобщенного экстремального студентизированного отклонения. Процедура обработки пропусков телеметрической информации заключается в приведении исходных данных к равномерному распределению.

После проведения процедуры обработки пропусков телеметрической информации следует процедура кодирования категориальных признаков в телеметрической информации, которая заключается в обработке категориальных признаков one-hot кодированием.

Далее полученную матрицу векторов состояния бортовой аппаратуры необходимо нормализовать. Нормализация – это процесс предварительной обработки входной информации, при которой значения признаков в наборе телеметрии приводятся к определенному диапазону значений [0; 1] или [-1; 1]. Обязательность нормализации наборов телеметрии вызвана природой алгоритмов машинного обучения. Представленные данные в исходном наборе телеметрической информации отличаются не только по

абсолютным величинам, но и по физическому смыслу. Отсутствие симметричного и унимодального распределения данных при обучении алгоритмов может вызвать ухудшение качества разрабатываемой модели. После нормализации все значения параметров работы бортовой аппаратуры будут приведены к определенному диапазону значений, что позволит использовать их для более корректного обучения алгоритмов.

Так как наборы телеметрической информации представлены в размерах от 5000 до 200000 измерений, такие алгоритмы, как SVR, Ridge, Lasso, Kernel Approximation, Naïve Bayes, МОВ, k-NN, не рассматриваются ввиду их неэффективности при решении данной прикладной задачи и долгой работы. Как правило, для решения задачи прогнозирования выбирают алгоритмы машинного обучения, которые имеют различный математический аппарат для получения результатов прогнозирования.

Деревья решений – одни из наиболее эффективных методов машинного обучения и предсказательной аналитики, решающие задачи «обучения с учителем». Типичная структура дерева решений изображена на рис. 2.

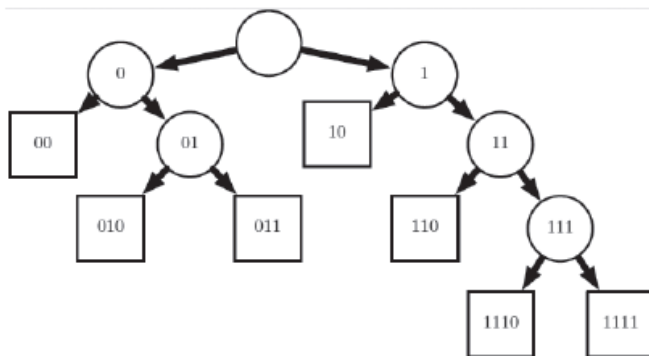


Рис. 2. Структура решающего дерева

Деревья решений представляют собой иерархические древовидные структуры, состоящие из решающих правил вида «Если ..., то ...». Правила генерируются автоматически в процессе обучения алгоритма и формулируются практически на естественном языке (например, «Если аккумуляторная батарея не может полностью зарядиться, то гарантированный срок активного существования вышел»). Данный алгоритм более интерпретируем и визуально понятен, чем работа многослойного перцептрона, поэтому его обучение является приоритетной задачей при выполнении прогнозирования технического состояния космического аппарата.

XGBoost – одна из самых эффективных библиотек, реализующая алгоритм градиентного бустинга на деревьях решений. Достоинствами применения данной библиотеки являются адаптивная скорость обучения алгоритма, добавление регуляризации к процессу обучения алгоритма, а также отличная работа с большими массивами данных.

Многослойный перцептрон – вид нейронной сети, состоящей как минимум из трёх слоев. Применение алгоритма Multilayer perceptron, так же как и SGDRegressor (Classifier), основано на применении стохастического градиентного спуска. Каждый параметр бортовой аппаратуры x_j , $j = \overline{1, N}$ связан с i -м нейроном ($i = \overline{1, M}$) единственного слоя сети посредством связи с весом w_{ij} , где M – число нейронов слоя; N – число входных параметров нейронной сети. Выход нейронного слоя (прогноз) вычисляется по следующей формуле:

$$y_i = f(w_{ij}x_j). \tag{3}$$

Достоинствами нейронных сетей являются неоспоримая эффективность при моделировании сложно формализуемых зависимостей между признаками набора телеметрии и инвариантность сложности решаемой задачи в зависимости от объёма набора данных. Недостатками применения являются сложная реализация и тщательный подбор гиперпараметров модели, которые могут отразиться на получении итогового результата. Структура многослойного перцептрона, изображена на рис. 3.

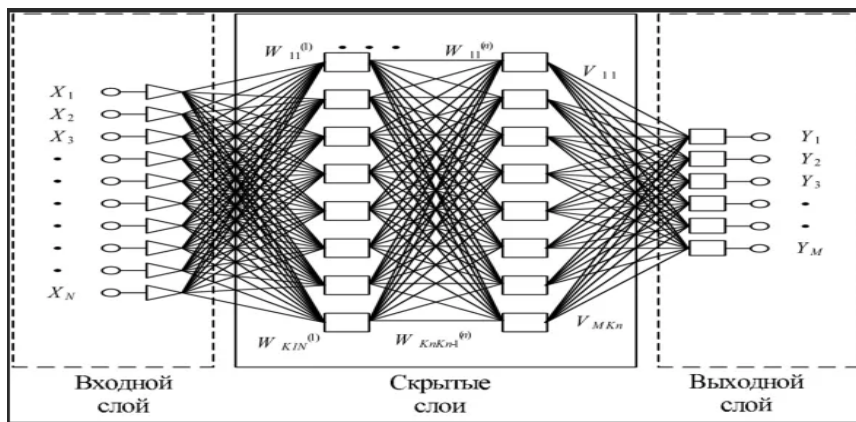


Рис. 3. Структура многослойного перцептрона

Одной из решаемых задач в проектировании алгоритмов машинного обучения является настройка и оптимизация гиперпараметров модели. Гиперпараметры – параметры, устанавливаемые перед обучением алгоритма. Они не изменяются в течение всего процесса обучения алгоритма.

В различных прикладных пакетах программ количество гиперпараметров может варьироваться от 10 до 50, условно разделенных на две категории. К первой категории относятся гиперпараметры, влияющие на время работы алгоритма и потребление памяти вычислительной машины, ко второй – влияющие на качество получаемой модели и на её способность максимально точно прогнозировать конечный результат при предъявлении новых примеров. Тем самым возникает противоречие между улучшением одной из категорий параметров и ухудшением другой.

Оптимизация гиперпараметров алгоритма XGBoost представляет собой достаточно простой процесс, который не представляет сложности для разработчика. Для оптимизации гиперпараметров данного алгоритма был применён многократный поиск оптимальных значений на сетке.

В процессе ручной настройки гиперпараметров нейронной сети были обнаружены следующие зависимости:

1. Увеличение числа скрытых блоков и слоёв ведет к увеличению времени работы алгоритма и вычислительных мощностей.
2. Оптимальная скорость обучения ведет к неизбежному увеличению репрезентативной емкости модели.
3. Увеличение ширины ядра модели слоёв ведет к увеличению памяти для хранения параметров и увеличению времени работы алгоритма.
4. Кодировка категориальных переменных one-hot кодированием ведёт к увеличению репрезентативной емкости модели.
5. Снижение коэффициентов весов ведет к увеличению репрезентативной емкости модели.

Заключение. Применяя данный метод для оптимизации поиска алгоритма машинного обучения удалось сократить временные и вычислительные затраты для получения заданной точности прогнозирования технического состояния бортовой аппаратуры космических аппаратов. Полученные результаты должны быть учтены при разработке математической модели интеллектуальной системы анализа телеметрической информации. Данная интеллектуальная система может быть положена в основу разрабатываемого аппаратно-программного комплекса, который позволит в полной мере оптимизировать процесс анализа статистической информации в секторе анализа центра управления полётом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гудфеллоу Я.* Глубокое обучение / Я. Гудфеллоу, И. Бенджио, А. Курвилль; пер. с англ. А.А. Слинкина. 2-е изд., испр. М.: ДМК Пресс, 2018. 652 с.
2. *Беркинблит М.Б.* Нейронные сети. М.: МИРОС и ВЗМШ РАО, 1993. 96 с.
3. *Левитин А.В.* Ограничения мощи алгоритмов: Деревья принятия решения // Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. С. 409–417.
4. *Hastie T.* Chapter 15. Random Forests / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman // The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. 2nd ed. Springer-Verlag, 2009. 746 p.
5. *Chen T., Guestrin C.* XGBoost: A Scalable Tree Boosting System // Krishnapuram, Balaji; Shah, Mohak; Smola, Alexander J.; Aggarwal, Charu C.; Shen, Dou; Rastogi, Rajeev (eds.). Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, San Francisco, CA, USA, August 13-17, 2016. ACM.
6. *Китов А.И.* Кибернетика в технике и экономике / А.И. Китов, А.А. Ляпунов // Вопросы философии. 1961. № 9. С. 79-88.
7. *Циолковский К.Э.* Труды по космонавтике. М.: Машиностроение, 1967.
8. *Терехов В.А.* Нейросетевые системы управления / В.А.Терехов, Д.В. Ефимов, И.Ю. Тюкин. М.: Высшая школа, 2002. 184 с.
9. *Журавлёв Ю.И.* «Распознавание». Математические методы. Программная система. Практические применения / Ю.И. Журавлёв, В.В. Рязанов, О.В. Сенько. М.: Изд-во «Фазис», 2006. 176 с.
10. *Piatetsky-Shapiro G.* Discovery, analysis, and presentation of strong rules // Knowledge Discovery in Databases / G. Piatetsky-Shapiro, W.J. Frawley. Cambridge, MA.: AAAI/MIT Press, 1991.

УДК 577.2:004.94

Д. И. Кондюк, М. Е. Соловьев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ms.kdi67@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УБИКВИТИНА

Методом молекулярной динамики была исследована молекулярная подвижность белка убиквитина в водном растворе. Степень подвижности молекулы в целом и отдельных ее фрагментов характеризовали величиной среднеквадратичного отклонения, или RMSD. Анализ среднеквадратичных отклонений для убиквитина показал, что в молекуле имеются области с повышенной и пониженной интенсивностью колебаний. Результаты расчета распределения подвижности звеньев по длине молекулярной цепочки согласуются с экспериментальными фактами по химической активности отдельных звеньев.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, молекулярная динамика, белки, убиквитин.

D. I. Kondyuk, M. Ye. Soloviev

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ms.kdi67@gmail.com

MODELING THE DYNAMICS OF UBIQUITIN

The molecular dynamics method was used to study the molecular mobility of the protein ubiquitin in an aqueous solution. The degree of mobility of the molecule as a whole and of its individual fragments was characterized by the standard deviation or RMSD. An analysis of the standard deviations for ubiquitin showed that the molecule contains regions with increased and decreased vibration intensity. The results of calculating the distribution of the mobility of the units along the length of the molecular chain are in agreement with the experimental facts on the chemical activity of individual units.

Keywords: computer modeling, molecular dynamics, proteins, ubiquitin.

Убиквитин – один из самых распространённых белков в природе. Это небольшой белок, молекула которого насчитывает 76 аминокислотных остатков, синтезируется во всех эукариотических клетках – от дрожжей до человека, а у человека – от клеток кожи до нейронов. Этим объясняется его название: англ. *ubiquitous* – присутствующий везде. Открытие убиквитина относится к 1975 году [1]. Первоначально функции его в организме оставались неясными, однако через 5 лет было сделано удивительное открытие: убиквитином метяются клеточные белки, которые по той или иной

причине направляются на деградацию в специальные клеточные органеллы – протеасомы [2, 3]. Авторы этого открытия – Aaron Ciechanover, Avram Hershko и Irwin Rose в 2004 году получили Нобелевскую премию по химии. Образно говоря, убиквитин является молекулярной «меткой смерти».

Было выявлено, что в роли «метки смерти» выступает полимер убиквитина, а не одна молекула. Существует два типа полимеров убиквитина, различающиеся по типу сшивки. Она может происходить через боковые цепи или 48-го или 63-го остатка лизина. Все основные процессы регулируются посредством сшивки 63-го звена. Любой гормон, любое внешнее воздействие, любой межклеточный «сигнал» приводят к каскадам убиквитинилирования-деубиквитинилирования сигнальных молекул.

В 2008 году была выявлена дополнительная роль убиквитина – регулирование транскрипционного аппарата путём модификаций РНК-полимеразного комплекса [4]. С каждым годом свидетельства о важной «жизненной» роли убиквитина растут. Буквально все основные процессы регулируются посредством убиквитинилирования-63: по частоте встречаемости эта модификация не уступает фосфорилированию. Вместе с тем до сих пор нет стройной теории, объяснявшей, по какому бы механизму всё это работает.

Метод компьютерного моделирования является мощным средством, широко применяемым в настоящее время для исследования структуры и динамики биологических объектов [5]. В случае убиквитина необходимо понять, почему именно определенные звенья цепи (48-е и 63-е) являются более активными в биохимических реакциях по сравнению с остальными. С точки зрения химической структуры и то и другое звено являются остатками лизина. Но остатки лизина формируют в молекуле также и несколько других звеньев. Возможно, что разница в химической активности связана с различной молекулярной подвижностью звеньев.

Целью настоящей работы явилось исследование молекулярной подвижности белка убиквитина в водном растворе методом молекулярной динамики.

В основе метода молекулярной динамики лежит численное решение классических уравнений движения Ньютона атомно-молекулярного ансамбля

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = f_i, \quad (1)$$

где m_i – масса i -й частицы; r_i – ее радиус-вектор; f_i – сила, действующая на рассматриваемую частицу со стороны остальных.

Силы f_i вычисляются как антиградиент потенциальной энергии V системы по координатам i -й частицы

$$f_i = - \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{array} \right) V . \quad (2)$$

Потенциальная энергия как функция координат частиц $V = V(x_i, y_i, z_i)$ в случае квантово-классического приближения вычисляется из решения уравнения Шредингера, а при использовании метода молекулярной механики на основании эмпирических функций (потенциальных функций силового поля), аппроксимирующих зависимость потенциальной энергии от внутренних координат частиц.

В настоящей работе использовался метод молекулярной механики в параметризации CHARMM27 [6]. В данном приближении энергия атомно-молекулярного ансамбля вычисляется в виде суммы ковалентных (V_b) и невалентных (V_{nb}) взаимодействий

$$V = V_b + V_{nb}, \quad (3)$$

где ковалентные взаимодействия описываются гармоническими колебаниями ковалентных связей, валентных углов между тремя атомами и двумя разными видами вращательных (торсионных) взаимодействий – для «правильных» и «неправильных» углов

$$V_b = \sum_{\text{связи}} K_b (b - b_0)^2 + \sum_{\text{углы}} K_\theta (\theta - \theta_0)^2 + \sum_{\text{двугр.углы}} K_\varphi (1 - \cos(n\varphi - \varphi_0)) + \sum_{\text{непр.двугр.углы}} K_{\varphi_i} (\varphi_i - \varphi_{i_0})^2, \quad (4)$$

где b и θ – расстояние между двумя атомами и угол между двумя смежными ковалентными связями; φ, φ_i – двугранные углы внутреннего вращения двух связей вокруг третьей, смежной с ними; $K_b, K_\theta, K_\varphi, K_{\varphi_i}$ – соответствующие коэффициенты упругости для каждого вида взаимодействий.

Невалентные взаимодействия описываются потенциалом кулоновских взаимодействий и взаимодействий Ван-дер-Ваальса

$$V_{nb} = \sum_{i,j} \left(\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ij}} + \epsilon_{ij} \left[\left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^{12} - 2 \left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^6 \right] \right), \quad (5)$$

где r_{ij} – расстояние между взаимодействующими, валентно не связанными атомами; q_i, q_j – заряды атомов; ϵ, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость среды и диэлектрическая постоянная; $\epsilon_{ij} = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_j}$ и $\sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$ – параметры Ван-дер-Ваальса для атомов i и j .

При численном интегрировании уравнений движения (1) используется алгоритм Верле, в соответствии с которым разностные аппроксимации для координат и скоростей атомов выглядят следующим образом:

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t) + \frac{\mathbf{f}_i(t)}{2m} \Delta t^2, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\mathbf{r}_i(t+\Delta t) - \mathbf{r}_i(t-\Delta t)}{2\Delta t}. \quad (7)$$

В настоящей работе для вычислений использовался программный комплекс NAMD [7].

Исходная геометрия молекулы убиквитина была получена в базе данных Protein Data Bank. После добавления недостающих атомов водорода молекулу помещали в оболочку из молекул воды в модели TIP3W, чтобы условия больше напоминали клеточную среду. При этом использовали сферически-симметричные и периодические граничные условия. На рис. 1 показана конформация молекулы убиквитина в минимуме потенциальной энергии в водной оболочке при периодических и сферически-симметричных граничных условиях. Также была изучена динамика убиквитина в обобщенном неявном растворителе Борна. Неявная модель растворителя – это метод моделирования, который устраняет необходимость в явных атомах воды путем включения многих эффектов растворителя в расчет межатомных сил.

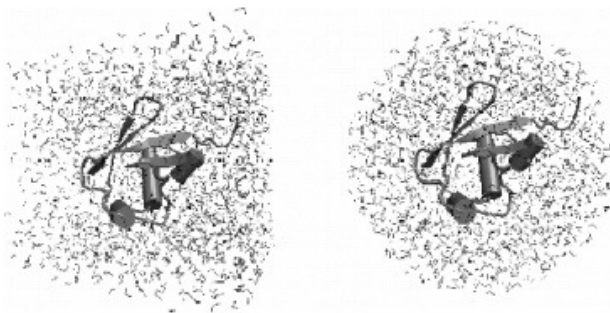


Рис. 1. Убиквитин в водном боксе и водной сфере

Степень подвижности молекулы в целом и отдельных ее фрагментов характеризовали величиной среднеквадратичного отклонения или RMSD. Для подсистемы, включающей α атомов, степень вариации структуры за время t может быть вычислена как

$$RMSD_{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{\alpha}} (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i)^2}{N_{\alpha}}}, \quad (8)$$

где N_α – число атомов, входящих в подсистему; N_t – число шагов по времени интегрирования уравнений движения; $\mathbf{r}_i(t)$ – координаты i -го атома в момент времени t ; $\langle \mathbf{r}_i \rangle$ – средние координаты данного атома, вычисляемые как

$$\langle \mathbf{r}_i \rangle = \frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{r}_i(t_j). \quad (9)$$

Для целой молекулы RMSD характеризует величину отклонения от определенного положения в пространстве за заданное время интегрирования, которое в настоящих численных экспериментах составляло 1 нс. На рис. 2 показаны более типичные графики RMSD для уравновешенной системы. Как видно, с течением времени наблюдается флуктуация значений RMSD около некоторого среднего значения, что свидетельствует о том, что наша система сбалансирована.

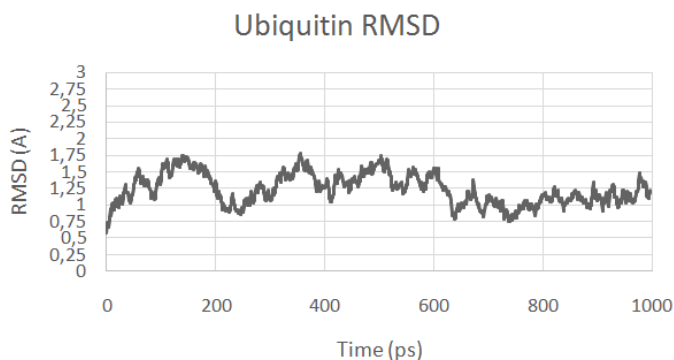


Рис. 2. RMSD в зависимости от времени моделирования для системы в водной сфере

На рис. 3 приведено распределение значений RMSD для отдельных звеньев молекулы.

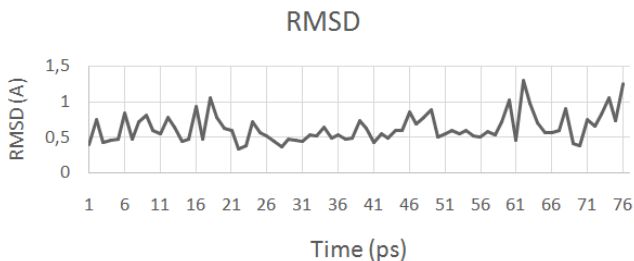


Рис. 3. RMSD остатков в зависимости от времени моделирования для системы в водном боксе

Анализ среднеквадратичных отклонений для отдельных звеньев молекулы убиквитина показывает, что в молекуле имеются области с повышенной и пониженной интенсивностью колебаний. Наиболее подвижным является концевое звено с номером 76. Звенья с номерами 48 и 63 также относятся к числу подвижных. Для периодических граничных условий вычисленные значения RMSD для них составили, соответственно, $0.78E-10$ м и $0.98E-10$ м. Значение RMSD 63-го звена больше, чем у 48-го, следовательно, оно более подвижно. Этот результат согласуется с тем фактом, что все основные биохимические процессы убиквитина протекают посредством убиквитинилирования-63.

Таким образом, результаты молекулярно-динамического моделирования молекулы убиквитина свидетельствуют о том, что среди всех аминокислотных остатков лизина в молекуле звено с номером 63 является наиболее подвижным, что, по-видимому, объясняет его более высокую активность в биохимических реакциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlesinger D. H.* Complete amino acid sequence of ubiquitin, an adenylate cyclase stimulating polypeptide probably universal in living cells / D.H. Schlesinger, G. Goldstein, H.D. Niall // *Biochemistry*. 1975. 14. P. 2214-2218.
2. *Hershko A.* Resolution of the ATP-dependent proteolytic system from reticulocytes: a component that interacts with ATP / A. Hershko, A. Ciechanover, I.A. Rose // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1979. 76. P. 3107–3110.
3. ATP-dependent conjugation of reticulocyte proteins with the polypeptide required for protein degradation / A. Ciechanover, H. Heller, S. Elias, A.L. Haas, A. Hershko // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1980. 77. P. 1365–1368.
4. Modulation of RNA polymerase II subunit composition by ubiquitylation / A. Daulny, F. Geng, M. Muratani, J.M. Geisinger, S.E. Salghetti, W.P. Tansey // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2008. 105. P. 19649-19654.
5. *Луцкекина С.В.* Методы компьютерного моделирования для исследования полимеров и биополимеров / С.В. Луцкекина, С.Д. Варфоломеев, Н.К. Балабаев. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 696 с.
6. All-atom empirical potential for molecular modeling and dynamics Studies of proteins / Jr.A.D. MacKerell, D. Bashford, M. Bellott [et al.] // *Journal of Physical Chemistry B*. 1998. 102. P. 3586-3616.
7. Scalable molecular dynamics with NAMD / J.C. Phillips, R. Braun, W. Wang [et al.] // *Journal of Computational Chemistry*. 2005. 26. P. 1781-1802.

УДК 621.891:621.026

Л. В. Королев¹, Д. О. Бытев¹, Д. А. Личак²

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevly@mail.ru

²Ярославский государственный педагогический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: d_lichak@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА В МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ С ЭФФЕКТАМИ ПАМЯТИ

Предложена марковская цепь для моделирования процесса измельчения частиц с учетом эффектов памяти. Изучены режимы измельчения, возникающие при различных плотностях распределения случайного интервала времени между разрушающими воздействиями.

Ключевые слова: случайный процесс, кинетическое уравнение, измельчение, марковская цепь.

L. V. Korolev¹, D. O. Bytev¹, D. A. Lichak²

¹Yaroslavl State Technical University,
Yaroslavl, Russia, e-mail: korolevly@mail.ru

²Yaroslavl State Pedagogical University,
Yaroslavl, Russia, e-mail: d_lichak@mail.ru

USING OF THE MARKOV CHAIN IN THE MODEL OF A GRINDING PROCESS WITH MEMORY EFFECTS

A Markov chain is proposed for modeling the process of particle grinding taking into account memory effects. The modes of grinding, arising at different densities of distribution of a random time interval between destructive actions, have been studied.

Keywords: stochastic process, kinetic equation, grinding, Markov chain.

Кинетика процессов измельчения обычно описывается интегро-дифференциальным уравнением [1]

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -S(x)f(x, t) + \int_x^{x_{\max}} B(x, x')S(x')f(x', t)dx', \quad (1)$$

где $f(x, t)$ – плотность распределения частиц по размерам x в момент времени t ; x_{\max} – максимальный размер измельчаемых частиц; $S(x)$ – се-

лективная функция, определяющая скорость измельчения частиц; $B(x, x')$ – распределительная функция, указывающая распределение по размерам x продуктов разрушения частицы размера x' . Полагая, что x – объем частицы, можно записать условия нормировки:

$$\int_0^{x_{\max}} f(x, t) dx = 1, \quad \int_0^{x'} B(x, x') dx = 1. \quad (2)$$

Селективную функцию можно представить в виде

$$S(x) = \frac{P(x)}{\langle \tau \rangle}, \quad \langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} p(\tau) \tau d\tau, \quad (3)$$

где $p(\tau)$ – плотность распределения длительности интервала между двумя последовательными воздействиями на частицу со стороны системы измельчения; $\langle \tau \rangle$ – средняя длительность этого интервала; $P(x)$ – вероятность разрушения частицы при очередном воздействии. При этом предполагается, что $\langle \tau \rangle$ значительно меньше, чем время наблюдения t . В реальных системах измельчения процесс разрушения частиц может значительно замедляться за счет различных диссипативных эффектов, неоднородности распределения фракций в рабочем объеме, образования «застойных зон», в которых частицы крайне редко подвергаются разрушающему воздействию. Это означает, что скорость изменения плотности $f(x, t)$ определяется не только состоянием системы в текущий момент времени, но и ее предшествующими состояниями. Как показано в [1], моделирование процесса измельчения в этих условиях, когда эффекты «памяти» становятся существенными, требует использования спадающих по степенному закону плотностей $p(\tau) \propto \tau^{-(1+\gamma)}$, $0 < \gamma \leq 1$, имеющих бесконечное математическое ожидание. Это приводит к тому, что селективная функция уже не может быть представлена в виде (3), а само кинетическое уравнение (1) становится интегральным не только по переменной x , но и по времени. Такие уравнения обычно применяются для описания немарковских процессов случайного транспорта с эффектами «памяти» – субдиффузии и супердиффузии [2]. В работе [3] был предложен метод моделирования такого транспорта, основанный на замене немарковского процесса на эквивалентный марковский процесс в расширенном фазовом пространстве, включающем дополнительную переменную – собственное время τ , прошедшее с момента последнего случайного воздействия на частицу. Переход к марковской кинетике позволяет, в свою очередь, использовать для проведения расчетов матричное представление процесса в виде цепи Маркова в дис-

кретном фазовом пространстве с дискретным временем [4], что позволяет упростить реализацию алгоритма на компьютере и ускорить вычисления. В настоящей работе мы предлагаем пример моделирования процесса измельчения с эффектами «памяти» с помощью цепи Маркова.

Пусть частица объема x , который может принимать значения в интервале от 0 до x_{\max} , подвергается случайному разрушающему воздействию в системе измельчения. Время наблюдения t изменяется от 0 до t_{\max} . Длительность случайного интервала τ между воздействиями задается плотностью вероятности $p(\tau)$ и лежит в пределах $(0, t_{\max})$. При каждом воздействии частица разрушается с вероятностью $P(x) = (x/x_{\max})^{1/3}$ [1]. Выберем распределительную функцию $B(x, x') = A(x')x$, где коэффициент $A(x')$ должен определяться из условия нормировки (2). Расширенное фазовое пространство частицы составляют переменные $\{x, \tau\}$. Для его дискретизации разделим интервал $(0, x_{\max})$ на n_x промежутков шириной Δ_x , а интервал $(0, t_{\max})$ на n_τ промежутков шириной Δ_τ . Тогда дискретная пространственная переменная \bar{x} будет принимать значения $1, 2, \dots, n_x$, а дискретное собственное время $\bar{\tau} - 1, 2, \dots, n_\tau + 1$. Дискретизацию времени наблюдения проводится с шагом Δ_t , разбивая интервал $(0, t_{\max})$ на n_t промежутков. Дискретное время \bar{t} пробегает значения $1, 2, \dots, n_t + 1$. Переход к первоначальным переменным дается выражениями: $x = \bar{x} \Delta_x$, $\tau = (\bar{\tau} - 1) \Delta_\tau$, $t = (\bar{t} - 1) \Delta_t$.

Вероятность нахождения частицы в каждой точке дискретного фазового пространства в момент времени \bar{t} определяется матрицей состояния $f_{\bar{t}}[\bar{x}, \bar{\tau}]$, удовлетворяющей, согласно (2), условию

$$\sum_{\bar{x}, \bar{\tau}} f_{\bar{t}}[\bar{x}, \bar{\tau}] = 1. \quad (4)$$

Здесь и далее суммирование ведется по всей области значений всех указанных под знаком Σ индексов. Эволюция матрицы f определяется матрицей переходных вероятностей M согласно уравнению [4]

$$f_{\bar{t}+1}[\bar{x}, \bar{\tau}] = \sum_{\bar{x}', \bar{\tau}'} M[\bar{x}, \bar{\tau} | \bar{x}', \bar{\tau}'] f_{\bar{t}}[\bar{x}', \bar{\tau}']. \quad (5)$$

Матрица M для рассматриваемого процесса может быть записана в виде

$$M = E + M_w + M_g, \quad (6)$$

где E – единичная матрица; M_w – матрица, описывающая изменение собственного времени в интервале между разрушающими воздействиями, а матрица M_g отражает изменения распределения частиц по размерам в момент разрушения. Эти матрицы, в соответствии со сделанными предположениями о виде функций $P(x)$ и $B(x, x')$, определяются следующими выражениями:

$$E = \delta[\bar{\tau}, \bar{\tau}'] \delta[\bar{x}, \bar{x}'], \quad (7)$$

$$M_w = (1 - q[\bar{\tau}'] \Delta_t) \delta[\bar{x}, \bar{x}'] \frac{\Delta_t}{\Delta_\tau} \cdot (\delta[\bar{\tau}, \bar{\tau}' + 1] - \delta[\bar{\tau}, \bar{\tau}'] (1 - \delta[n_\tau + 1, \bar{\tau}'])), \quad (8)$$

$$M_g = q[\bar{\tau}'] \Delta_t \delta[\bar{\tau}, 1] \cdot (\bar{B}[\bar{x}, \bar{x}'] \bar{S}[\bar{x}'] - \delta[\bar{x}, \bar{x}'] \bar{S}[\bar{x}] (1 - \delta[\bar{x}', 1])), \quad (9)$$

где

$$\delta[i, j] = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{S}[\bar{x}] = \left(\frac{\bar{x}}{n_x} \right)^{1/3}, \quad \bar{B}[\bar{x}, \bar{x}'] = (1 - \delta[\bar{x}', 1]) \frac{2\bar{x}}{\bar{x}'(\bar{x}' - 1)}, \quad (11)$$

а $q[\bar{\tau}]$ – вероятность разрушения частицы в единицу времени, которая для плотности степенного вида $p(\tau) = \tau_0^{-1} \gamma / (1 + \tau / \tau_0)^{1+\gamma}$ при $0 < \gamma \leq 1$ определяется выражением [3, 4]:

$$q(\bar{\tau}) = \frac{\gamma}{(\Delta_\tau (\bar{\tau} - 1) + \tau_0)}, \quad (12)$$

а для экспоненциальной плотности $p(\tau) = \tau_0^{-1} \exp(-\tau / \tau_0)$ выражением

$$q(\bar{\tau}) = \frac{1}{\tau_0}. \quad (13)$$

В (12) – (13) τ_0 – произвольный параметр, устанавливающий единицу измерения времени в данной модели.

Численные расчеты матрицы f по уравнению (5) с учетом (6) – (13) проводились с начальным условием

$$f_1[\bar{x}, \bar{\tau}] = \delta[\bar{x}, n_x] \delta[\bar{\tau}, 1], \quad (14)$$

соответствующим предположению, что в начальный момент времени в системе имелись только частицы самой крупной фракции.

Результаты вычислений при $x_{\max} / \Delta_x = 10$, $t_{\max} / \tau_0 = 10$, $n_x = n_\tau = 10$, $n_t = 100$ приведены на рис. 1, где представлена эволюция распределения частиц по размерам $f_t[\bar{x}] = \sum_{\bar{\tau}} f_t[\bar{x}, \bar{\tau}]$ для различных режимов измельчения.

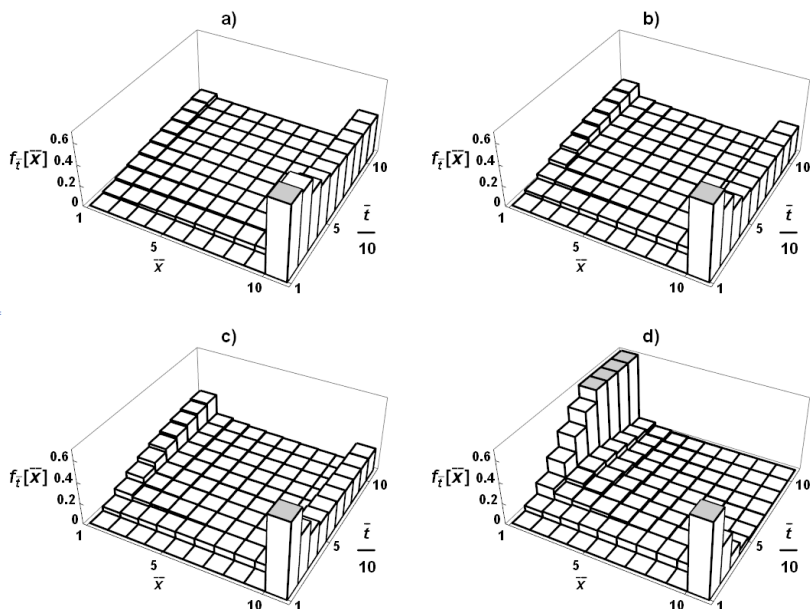


Рис. 1. Эволюция распределения частиц по размерам в различных режимах измельчения.

На диаграммах *a–c* показаны результаты вычислений для удельной вероятности $q(\bar{\tau})$, заданной формулой (12) с различными значениями параметра γ :

a) – $\gamma = 0,5$; *b*) – $\gamma = 0,8$; *c*) – $\gamma = 1$. На диаграмме *d*) – результаты для $q(\bar{\tau})$, заданной формулой (13).

Как видно из графиков, степенное распределение времени ожидания разрушающего воздействия (рис. 1, *a–c*) приводит к существенному замедлению процесса измельчения по сравнению с экспоненциальным распределением (рис. 1, *d*)), причем это замедление тем существеннее, чем меньше значение параметра γ . При этом для степенной модели характерны немонотонные бимодальные распределения с провалом в области средних

фракций. Эти тенденции ярко проявляются на рис. 2, где показано изменение со временем среднего размера частицы $\langle x \rangle$ и среднеквадратического отклонения σ для распределений, приведенных на рис. 1.

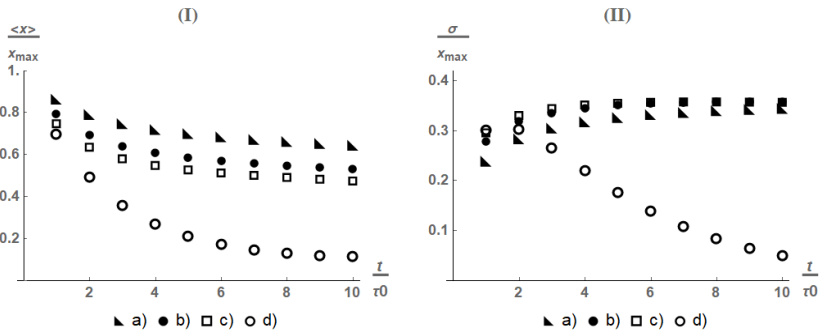


Рис. 2. Изменение со временем моментов модельных распределений:
 (I) – среднего размера частицы; (II) – среднеквадратического отклонения.
 Буквенные обозначения *a) – d)* соответствуют рис. 1

Из рис. 1, 2 следует, что переход от экспоненциального распределения времени ожидания к степенному позволяет качественно изменить характер протекания процесса. Таким образом, в рамках предложенной модели можно изучать более широкий спектр процессов измельчения, чем предполагает классическая модель (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королев Л. В.* Уравнение кинетики измельчения с произвольным законом распределения времени ожидания / Л. В. Королев, Д. О. Бытев // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, №2. С. 53-61.
2. *Kutner R.* The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook / R. Kutner, J. Masoliver // Eur. Phys. J. B. 2017. 90: 50. DOI: 10.1140/epjb/e2016-70578-3
3. *Королев Л. В.* Моделирование процессов случайного транспорта с учетом эффектов памяти. / Л. В. Королев, Д. О. Бытев // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. 2018. Т. 56, №4. С. 32–35.
4. *Королев Л. В.* Применение марковской цепи в модели случайного процесса с эффектами памяти. / Л. В. Королев, Д. О. Бытев // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2020. С. 159–164.

УДК 004.94

О. Ю. Марьясин

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@ystu.ru

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ОНЛАЙН-МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ

Рассмотрен программный комплекс из трех взаимосвязанных приложений, предназначенный для онлайн-моделирования и цифровых двойников. Совместное использование приложений позволяет организовать автоматизацию операций по работе с моделями, выполнению моделирования, обработке результатов моделирования и обмену данными с физическими объектами в режиме реального времени. Программный комплекс может использовать модели, подготовленные в различных системах моделирования. Для обмена данными с физическими объектами применяется популярный общепромышленный стандарт. Представленный программный комплекс может служить эффективной платформой для реализации цифровых двойников.

Ключевые слова: цифровой двойник, онлайн-моделирование, FMI, язык программирования Python, автоматизация операций, OPC UA.

O. Yu. Maryasin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru

SOFTWARE TOOL FOR ONLINE SIMULATION AND DIGITAL TWINS

The article describes a software complex of three interconnected applications designed for online simulation and digital twins. Sharing applications allows you to organize the automation of operations for working with models, performing simulations, processing simulation results and exchanging data with physical objects in real time. The software package can use models prepared in various modeling systems. A popular industry standard is used to exchange data with physical objects. The presented software package can serve as an effective platform for the implementation of digital twins.

Keywords: digital twin, online simulation, FMI, language programming Python, OPC UA.

Прорыв в развитии цифровых технологий, позволивший увеличить вычислительные мощности и обрабатывать большие объемы данных в ре-

альном времени, привел к появлению концепции цифрового двойника (Digital Twin) [1]. Впервые полноценно эта концепция была описана в Мичиганском университете в 2002 г. Сейчас цифровым двойником называют виртуальную модель, которая на микро- и макроуровне либо описывает реально существующий объект (выступая как дубль готового конкретного изделия), либо служит прототипом будущего объекта. При этом любая информация, которая может быть получена при тестировании физического объекта, должна быть получена и на базе тестирования его цифрового двойника. В концепции цифрового двойника виртуальная модель не отбрасывается после создания материального объекта, а используется в связке с физическим объектом на протяжении всего жизненного цикла: на этапе тестирования, доработки, эксплуатации и утилизации. Физический объект использует датчики, которые собирают данные о состоянии объекта в реальном времени, после чего эти сведения отправляются цифровому двойнику. На основе полученных данных уточняется цифровая модель, которая, в свою очередь, дает рекомендации по оптимизации режима эксплуатации и обслуживания реального объекта [2].

Для создания цифровых двойников могут использоваться различные пакеты для научных и инженерных расчетов, такие как MATLAB, SCILAB, пакеты, основанных на языке Modelica (Dymola, OpenModelica, MapleSim) и другие. Реализация цифровых двойников в таких системах моделирования затруднена тем, что они ориентированы на интерактивное взаимодействие с пользователем. При таком взаимодействии пользователь сначала задает параметры модели, запускает моделирование, а затем анализирует его результаты. Моделирование при этом происходит не в реальном, а в так называемом модельном времени и процессы, протекающие часами, могут быть смоделированы за несколько секунд. Работа с цифровым двойником часто требует, чтобы моделирование производилось в реальном времени, в темпе поступления данных с физического объекта. Организация такого режима возможна далеко не во всех системах моделирования, а там где возможна, например, в среде MATLAB/Simulink, требует специальной настройки среды, подключения ряда специализированных библиотек и связана с большими вычислительными затратами.

При создании цифровых двойников сложных объектов возможна ситуация, когда уже существуют готовые модели отдельных компонентов сложной системы, но они выполнены в разных системах моделирования и поэтому несовместимы друг с другом. В таких случаях значительную роль для обмена данными и выполнения совместных расчетов и моделирования могла бы сыграть организация единого общепринятого интерфейса между различными пакетами для расчетов и моделирования. Основным кандида-

том на роль такого интерфейса сейчас претендует интерфейс FMI (Functional Mock-up Interface) [3]. FMI разрабатывался как независимый стандарт для обмена моделями и проведения совместного моделирования. Первая версия FMI появилась в 2010 г. В настоящее время интерфейс FMI поддерживается более 100 различными программными системами, среди которых Adams, ANSYS, IBM Rational Rhapsody, MATLAB/Simulink, NI LabVIEW, Dymola, SimulationX, MapleSim, OpenModelica и многие др. Модели, разработанные в различных системах с помощью интерфейса FMI, могут экспортироваться в FMU (Functional Mock-up Unit) модули, которые могут использоваться другими системами для обмена моделями (Model Exchange) или совместного моделирования (Co-Simulation).

Работа цифрового двойника предполагает обмен информацией между цифровым двойником и моделируемым физическим объектом. Для организации обмена данными между цифровым двойником и физическим объектом может быть использован интерфейс OPC. Данный интерфейс является общепромышленным стандартом и широко используется в системах управления и для межпрограммных коммуникаций. Системы моделирования, такие как MATLAB/Simulink, также имеют средства для поддержки интерфейса OPC. Другими достоинствами OPC интерфейса являются:

- наличие большого числа приложений, поддерживающих интерфейс OPC;
- наличие свободно-доступных библиотек для реализации OPC интерфейса для большинства универсальных языков программирования;
- возможность работы в распределенной информационной среде.

Последняя по времени выпуска спецификация OPC UA совмещает все преимущества предыдущих спецификаций и обеспечивает устойчивую работу как в локальных, так и в глобальных сетях [4].

Учитывая все сказанное, в настоящее время становится актуальной разработка системы для онлайн-моделирования и цифровых двойников на базе интерфейсов FMI и OPC. Такая система должна удовлетворять следующим основным требованиям:

- включать поддержку интерфейса FMI для загрузки моделей, созданных в различных пакетах программ, и проведения моделирования;
- иметь развитые математические возможности, векторно-матричные операции, возможность свободного программирования, создания новых объектов;
- иметь возможность запуска моделей как интерактивно, так и в пакетном режиме, а также по заданному расписанию;
- включать поддержку интерфейса OPC для связи с физическими объектами;
- включать развитые средства визуализации, в том числе трёхмерной.

Автором разработан программный комплекс, который позволяет реализовать данные возможности и избежать указанных ранее недостатков пакетов моделирования. Разработанная система, в настоящее время включает три взаимосвязанных приложения. Все приложения были разработаны с помощью языка Python и его специализированных библиотек. Первое приложение FMITool предназначено для выполнения следующих основных функций:

- загрузка FMU модулей, созданных в различных системах моделирования;
- выполнение моделирования для загруженной модели, в соответствии с заданными параметрами;
- представление результатов моделирования в графическом виде;
- экспорт результатов моделирования в формат .csv;
- выполнение типовых операций по автоматизации процесса моделирования индивидуально, в пакетном режиме или по заданному расписанию.

Вид главного окна приложения FMITool с открытой вкладкой “Редактор” показан на рис. 1. Для работы с интерфейсом FMI в приложении FMITool используется библиотека fmpy языка Python. Поддерживается интерфейс FMI версий 1.0 и 2.0.

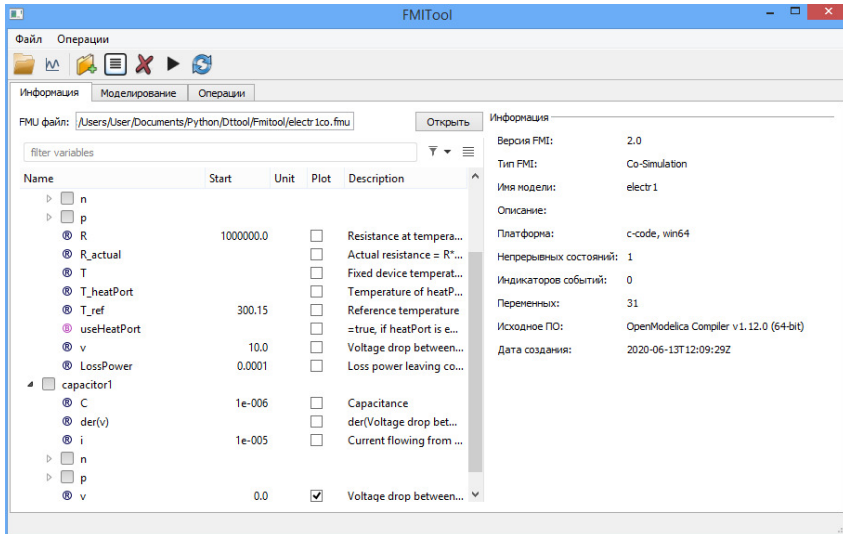


Рис. 1. Вид главного приложения FMITool

На вкладке “Информация” приложения FMITool можно загрузить файл FMU модуля, просмотреть информацию о модуле и его переменных. Для примера был загружен FMU-модуль, созданный в системе OpenModelica. Вид исходной модели в системе OpenModelica показан на рис. 2.

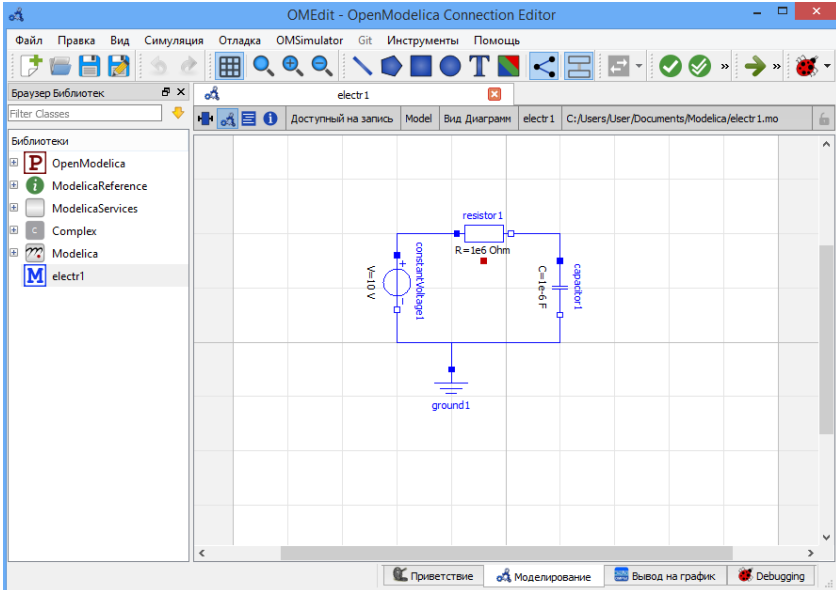


Рис. 2. Вид модели в системе OpenModelica

Вкладка “Моделирование” приложения позволяет выполнить моделирование открытой модели для заданных значений параметров и визуализировать результаты моделирования с помощью графиков. Кроме того, результаты моделирования можно сохранить в файле формата .csv. Поддерживается два вида графиков. Первый вид строится непосредственно на вкладке “Моделирование” для переменных, отмеченных в списке переменных на вкладке “Информация”. Второй вид графиков строится в отдельном окне с помощью библиотеки Matplotlib языка Python. Этот вид графиков может потребоваться, если необходимо: строить графики зависимостей одной переменной от другой, строить трехмерные графики, выполнить операции с изображением или его частью, сохранить изображение в одном из поддерживаемых графических форматов. Вид вкладки “Моделирование” показан на рис. 3.

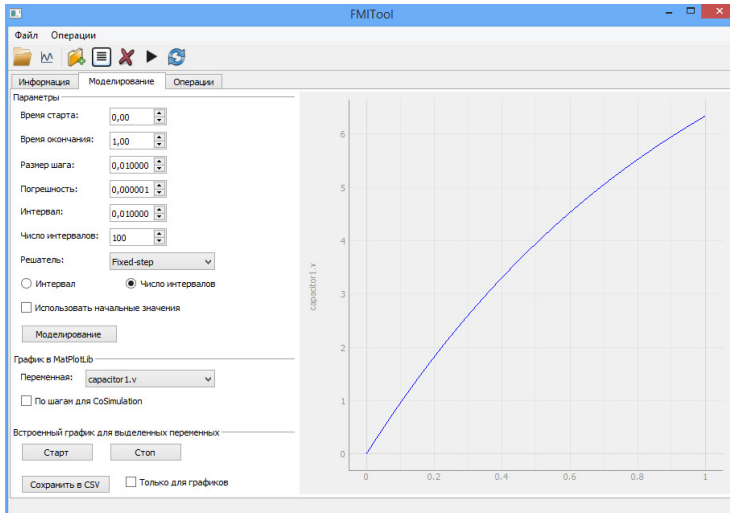


Рис. 3. Вид вкладки “Моделирование”

Выполнение различных операций с моделями в пакетном режиме или по расписанию может быть реализовано на вкладке “Операции”. Вид вкладки показан на рис. 4. К настоящему времени реализованы следующие типы операций: Начать моделирование, Получить значение переменной, Установить значение переменной, Сделать шаг. Параметры каждой операции задаются пользователем в диалоговом режиме. Операции могут добавляться, удаляться, редактироваться и выполняться. Выполнение операций может производиться индивидуально, коллективно (пакетный режим), коллективно в цикле через определенный промежуток времени. Кроме того, выполнение каждой операции может быть задано по индивидуальному расписанию. Каждая операция приложения FMITool имеет внутреннюю переменную для хранения входных или выходных данных (результатов), которая одновременно является переменной операций приложения ScriptTool.

Приложение ScriptTool предназначено для выполнения следующих основных функций:

- создания, удаления и редактирования внутренних переменных ScriptTool;
- редактирования значений переменных операций внешних приложений;
- редактирования значений выходных переменных скриптов;
- создания, редактирование и выполнение произвольных скриптов на языке Python.

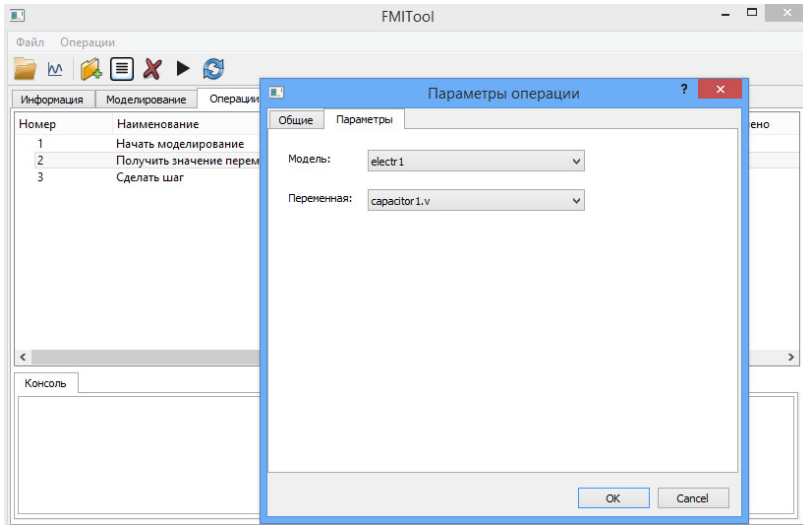


Рис. 4. Вид вкладки “Операции”

Вид главного окна приложения ScriptTool с открытой вкладкой “Скрипты” показан на рис. 5.

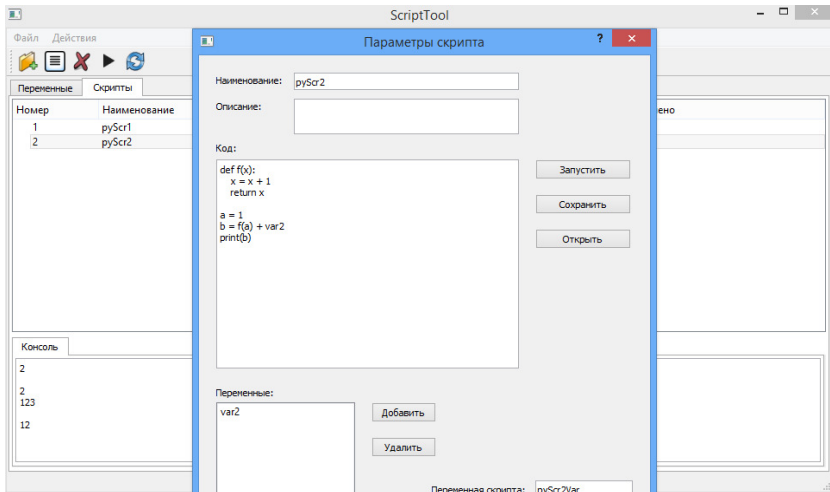


Рис. 5. Вид главного окна приложения ScriptTool

Приложение ScriptTool поддерживает следующие виды переменных: свободные переменные, к которым могут иметь доступ как скрипты приложения ScriptTool, так и внешние Python-приложения; переменные операций, которые связаны с переменными операций внешних приложений; переменные скриптов, которые являются выходными переменными скриптов приложения ScriptTool. Скрипты могут иметь доступ ко всем перечисленным видам переменных, а внешние Python-приложения могут иметь доступ к свободным переменным и, через операции, к переменным операций. Кроме того, скрипты могут иметь свои локальные переменные. Такая организация переменных позволяет организовать эффективный обмен данными как между отдельными скриптами, так и между скриптами и внешними Python-приложениями.

Применение языка Python в качестве скриптового языка открывает широкие возможности для поддержки разработанной системы со стороны математических расчетов, статистической обработки, машинного и глубокого машинного обучения. Скрипты приложения ScriptTool могут выполняться индивидуально, коллективно в цикле через определенный промежуток времени или по индивидуальному расписанию.

Дополняет программный комплекс приложение OPCTool, предназначенное для выполнения следующих функций:

- подключение к OPC UA серверу;
- просмотр структуры данных OPC UA сервера, значений атрибутов тегов OPC UA сервера;
- подписка на изменение значений тегов OPC UA сервера;
- выполнение операций чтения значений тегов OPC UA сервера в переменные приложения ScriptTool;
- выполнение операций записи значений переменных приложения ScriptTool в теги OPC UA сервера.

Вид главного окна приложения OPCTool с открытой вкладкой “OPC UA Клиент” показан на рис. 6.

На вкладке “OPC UA Клиент” приложения OPCTool пользователь может подключиться к OPC UA серверу, получить информацию о структуре данных и значениях атрибутов тегов OPC UA сервера и оформить подписку на изменение значений тегов OPC UA сервера. Выполнение операций по обмену данными с OPC UA серверами реализовано на вкладке “Операции”. К настоящему времени реализованы следующие типы операций: Подключиться к OPC UA серверу, Прочитать значение тега OPC UA сервера, Записать значение тега OPC UA сервера, Отключиться от OPC UA сервера. Параметры каждой операции задаются пользователем в диалоге-

вом режиме. Операции могут добавляться, удаляться, редактироваться и выполняться. Выполнение операций может производиться индивидуально или коллективно в цикле через определенный промежуток времени. Кроме того, выполнение каждой операции может быть задано по индивидуальному расписанию.

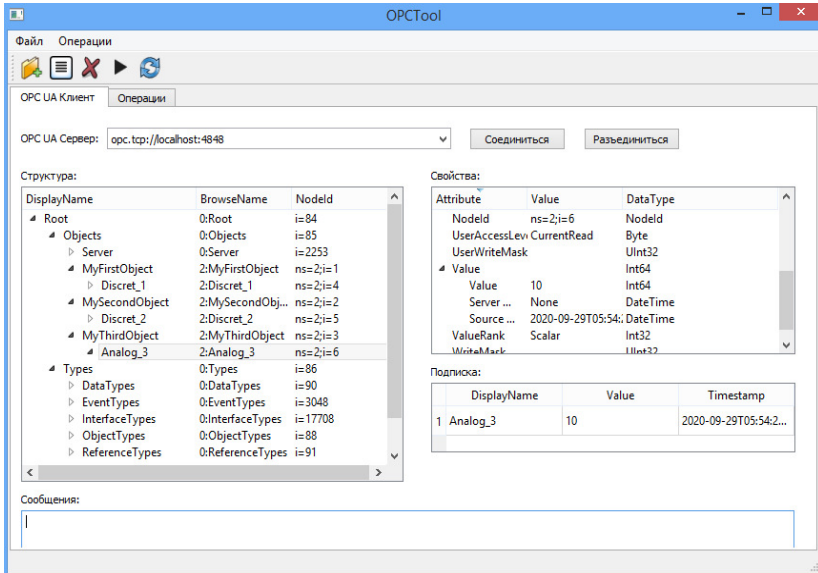


Рис. 6. Вид главного окна приложения OPCTool

Совместное использование приложений FMITool, ScriptTool и OPC-Tool позволяет организовать автоматизацию операций по работе с моделями, выполнению моделирования, обработке результатов моделирования и обмену данными с физическими объектами в режиме реального времени. Между операциями приложений FMITool и OPCTool и скриптами ScriptTool может быть организован двунаправленный обмен информацией. С одной стороны, входные данные моделей и результаты моделирования могут передаваться в скрипты для последующей обработки. С другой стороны, данные с физического объекта с помощью приложений OPCTool и ScriptTool могут быть получены, обработаны и переданы для корректировки переменных и параметров моделей. Время и период выполнения операций и скриптов может гибко настраиваться с помощью встроенного планировщика.

Таким образом, представленный в статье программный комплекс, включающий приложения FMITool, ScriptTool и ORCSTool позволяет реализовать моделирование и обмен данными с физическим объектом в реальном масштабе времени. Следовательно, данный программный комплекс может служить эффективной платформой для реализации цифровых двойников реальных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Parrott A., Warshaw L.* Industry 4.0 and the digital twin technology [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www2.deloitte.com/us/en/insights/focus/industry-4-0/digital-twin-technology-smart-factory.html> (дата обращения 27.09.2020)
2. *Прохоров А.* Цифровые двойники. Концепция развивается [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://data.cnews.ru/articles/2018-04-18_tsifrovye_dvojniki_kontseptsiya_razvivaetsya
3. Functional Mock-up Interface [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://fmi-standard.org/> (дата обращения 27.09.2020)
4. Home Page - ORC Foundation [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://orcfoundation.org/> (дата обращения 27.09.2020)

УДК 517.91:621.516

В. А. Наумов

Калининградский государственный технический университет
Россия, г. Калининград, e-mail: van-old@mail.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЗАКАЧИВАНИЯ ВОЗДУХА ВОДОКОЛЬЦЕВЫМ КОМПРЕССОРОМ

Задача динамики закачивания воздуха в рабочую камеру с помощью компрессорной машины сводится к задаче Коши. Дифференциальное уравнение записано в безразмерной форме. Задача решена аналитически для случая линейной зависимости производительности водокольцевого компрессора от давления в рабочей камере. Исследовано влияние значения коэффициента утечки на время достижения заданного давления.

Ключевые слова: водокольцевая компрессорная машина, давление, производительность, коэффициент утечки, задача Коши, аналитическое решение.

V. A. Naumov

Kaliningrad State Technical University
Russia, Kaliningrad, e-mail: van-old@mail.ru

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF AIR INJECTION BY A WATER-RING COMPRESSOR

The problem of dynamics of air injection into the working chamber using a compressor machine is reduced to the Cauchy problem. The differential equation is written in dimensionless form. The problem is solved analytically for the case of linear dependence of the performance of a water-ring compressor on the pressure in the working chamber. The effect of the leakage coefficient on the time to reach the set pressure was investigated.

Keywords: water-ring compressor machine, pressure, performance, leakage coefficient, Cauchy problem, analytical solution.

Введение. Водокольцевые компрессорные машины (ВКМ) широко используются для закачивания воздуха в рабочую камеру в различных инженерных системах. Это объясняется высокой надежностью ВКМ и их способностью работать в сложных условиях. Для совершенствования работы ВКМ применяются экспериментальные и теоретические методы (см. [1-3] и библиографию в них). При этом формируемые математические модели довольно сложны, для их исследования приходится использовать численные методы. В данной статье рассматривается частный случай, когда задача

динамики закачивания воздуха в рабочую камеру с помощью ВКМ имеет аналитическое решение.

Нагрузочные характеристики водокольцевого компрессора

Во многих случаях зависимость производительности G и затраченной мощности N ВКМ от давления P в режиме компрессора (воздуходувки) с достаточной для инженерной практики точностью [4] можно аппроксимировать прямыми линиями (рис. 1):

$$G \equiv f_1(P) = G_0 - a \cdot P, \quad N \equiv f_2(P) = N_0 - b \cdot P, \quad (1)$$

где G_0, N_0, a, b – эмпирические константы.

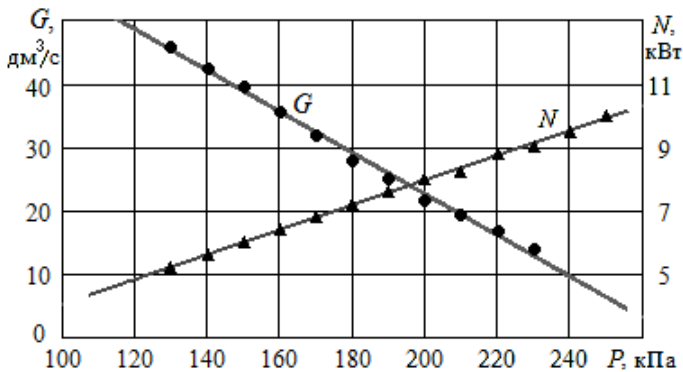


Рис. 1. Зависимость производительности и затраченной мощности ВКМ КЕ-180 от давления при частоте вращения ротора 1450 об/мин. Точки – экспериментальные данные [5], линии – результаты расчета по (1)

Запишем производительность из (1) в безразмерной форме

$$q \equiv G / G_0 = \varphi(p) = 1 - \alpha \cdot p, \quad p = P / P_A, \quad \alpha = a \cdot P_A / G_0. \quad (2)$$

Постановка задачи

Как известно, в общем случае дифференциальное уравнение закачивания воздуха компрессором в некоторую емкость имеет вид [6, 7]:

$$V_0 \cdot \frac{dP}{dt} = P \cdot f_1(P) - S_T, \quad (3)$$

где V_0 – объем вакуумной системы; P – давление в ней; t – текущее время; $f_1(P)$ – зависимость эффективной производительности компрессора от давления, которая находится экспериментально (см. рис. 1); S_T – поток натекания, обусловленный утечками.

Для потока натекаания используем общепринятую в компрессорной технике формулу

$$S_T = k \cdot f_1(p) \cdot (P - P_A), \quad (3)$$

где $0 < k < 1$ – коэффициентом утечки (эмпирическая константа).

Полагаем давление в рабочей камере в начальный момент равным атмосферному давлению P_A . Подставив (4) в (3), получим

$$V_0 \cdot \frac{dP}{dt} = f_1(P(t)) \cdot (k \cdot P_A + (1 - k) \cdot P(t)), \quad P(0) = P_A. \quad (4)$$

Выразим в (4) размерные переменные через безразмерные величины из (2):

$$\frac{dp}{d\tau} = \varphi(p(\tau)) \cdot ((1 - k)p(\tau) + k), \quad p(0) = 1, \quad (5)$$

где безразмерное время $\tau = tG_0 / V_0$.

В общем случае, при произвольной форме зависимости $\varphi(p)$, задача Коши не имеет аналитического решения. Она может быть решена численным методом, как в [8].

Аналитическое решение задачи Коши

Подставим (2) в (5)

$$\frac{dp}{d\tau} = (1 - \alpha p(\tau)) \cdot ((1 - k)p(\tau) + k), \quad p(0) = 1. \quad (6)$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (6)

$$-\frac{dp}{(\alpha p - 1)((1 - k)p + k)} = d\tau. \quad (7)$$

Знаменатель левой части (7) имеет два действительных корня (отрицательный и положительный):

$$\xi_1 = -\frac{k}{1 - k} < 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{\alpha} > 0.$$

Преобразуем уравнение (7)

$$-\frac{1}{\alpha(1 - k) \cdot (\xi_2 - \xi_1)} \left(\frac{1}{p - \xi_2} - \frac{1}{p - \xi_1} \right) \cdot dp = d\tau. \quad (8)$$

Интегрирование (10) с учетом начального условия дает

$$\tau = \frac{-1}{\alpha(1 - k) \cdot (\xi_2 - \xi_1)} \cdot \ln \left(\frac{p - \xi_2}{p - \xi_1} \cdot \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} \right). \quad (9)$$

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчета по формуле (9).

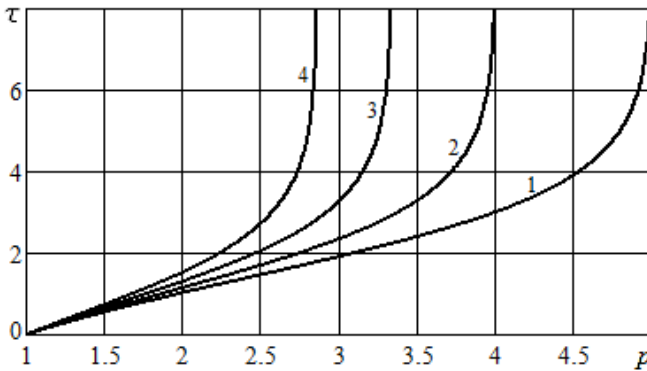


Рис. 2. Зависимость безразмерного времени достижения заданного давления при $k=0,15$ и различных значениях α :
 1 – $\alpha=0,2$; 2 – $\alpha=0,25$; 3 – $\alpha=0,3$; 4 – $\alpha=0,35$

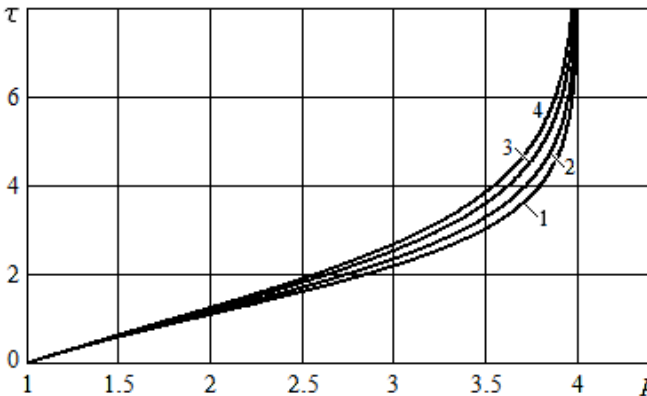


Рис. 3. Зависимость безразмерного времени достижения заданного давления при $\alpha=0,25$ и различных значениях k :
 1 – $k=0$; 2 – $k=0,15$; 3 – $k=0,3$; 4 – $k=0,4$

Безразмерное время достижения заданного давления увеличивается с ростом значений α и k . Заметим, что $\tau \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow 1/\alpha$.

Механическая работа, затраченная ВКМ за время t , с учетом зависимости (1) может быть вычислена по формуле

$$A(t) = \int_0^t f_2(P(\theta)) d\theta = N_0 \cdot t - b \cdot \int_0^t P(\theta) d\theta. \quad (10)$$

Заключение. Задача динамики закачивания воздуха в рабочую камеру с помощью компрессорной машины сводится к задаче Коши. Дифференциальное уравнение записано в безразмерной форме. Рассмотрен частный случай, когда зависимость эффективной производительности ВКМ от давления в рабочей камере может быть аппроксимирована линейной функцией. При указанной форме нагрузочной характеристики ВКМ поставленная задача имеет аналитическое решение. Исследовано влияние значения коэффициента утечки на время достижения заданного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kakuda K.* Flow simulations in a liquid ring pump using a particle method / K. Kakuda, Y. Ushiyama, S. Obara [et al.] // *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2010. Vol. 66, No. 3. P. 215–226.
2. *Великанов Н.Л.* Компрессорные машины вакуумных рыбонасосов / Н.Л. Великанов, В.А. Наумов // *Рыбное хозяйство*. 2018. № 6. С. 78–81.
3. *Великанов Н.Л.* Работа водокольцевого компрессора с пневмопроводом / Н.Л. Великанов, В.А. Наумов, С.И. Корягин // *Технико-технологические проблемы сервиса*. 2020. № 1 (51). С. 18–22.
4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: учебник. М.: КНОРУС, 2010. 664 с.
5. *Samson Pumps* [Электронный ресурс]. Режим доступа – свободный. URL: <https://www.samson-pumps.com/> (дата обращения: 20.09.2020).
6. *Абдурашитов С.А.* Насосы и компрессоры / С.А. Абдурашитов, А.А. Тупиченков, И.М. Вершинин. М.: Недра, 1974. 296 с.
7. *Шатохин В.Л.* Вакуумная техника: лабораторный практикум / В.Л. Шатохин, В.П. Шестак. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. 84 с.
8. *Великанов Н.Л.* Динамические характеристики вакуумных насосов и компрессоров рыбонасосных установок / Н.Л. Великанов, В.А. Наумов // *Рыбное хозяйство*. 2019. № 1. С. 79–83.

УДК 66.022.51

В.А. Язев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: yazev_v_a@rambler.ru, yazevva@yystu.ru

ФУНКЦИИ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ПРИ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Рассматривается модель периодического процесса измельчения на базе эволюции ансамбля частиц как случайного процесса. Представлены результаты имитационного моделирования измельчения при различных параметрах селективной и распределительной функции измельчения методом Монте–Карло.

Ключевые слова: *измельчение, случайный процесс, имитационное моделирование, метод Монте-Карло, селективная и распределительная функции измельчения.*

V. A. Yazev

Yaroslavl State Technical University
Yaroslavl, Russia, e-mail: yazev_v_a@rambler.ru, yazevva@yystu.ru

GRINDING FUNCTIONS IN SIMULATION MODELING

A model of the periodic grinding process based on the evolution of an ensemble of particles taken as a random process is considered. The result of simulation modeling of grinding for various parameters of the selective and distribution functions of grinding by the Monte Carlo method are presented.

Keywords: *grinding, random process, simulation, Monte Carlo method, selective and distribution grinding functions.*

Процесс измельчения играет большую роль в технологии, поэтому его математическое моделирование очень важно для решения задачи повышения эффективности оборудования, систем переработки материалов и систем управления технологическими процессами. Для описания измельчения используются матричные модели или модели на базе интегродифференциального уравнения [1]:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -S(x)f(x, t) + \int_x^{\infty} S(y)B(x, y)f(y, t)dy, \quad (1)$$

где $f(x, t)$ – фракционный состав, $S(x)$ и $B(x, y)$ – соответственно селективная и распределительная функции измельчения.

Ранее была предложена модель имитационного моделирования измельчения и агломерации на базе эволюции ансамбля частиц. Эта эволюция заключалась в совокупности элементарных переходов на каждом шаге между состояниями системы. При увеличении числа частиц в системе (ансамбле) имело место измельчение, а при уменьшении – агломерация [2]. Методом Монте – Карло на каждом шаге разыгрывались: характер процесса: измельчение или агломерация, факт измельчения или факт агломерации для случайно выбранной частицы ансамбля [2]. Данный подход является платформой для имитационного моделирования измельчения – агломерации.

Представляет интерес исследовать на основе предложенного подхода [2] влияние параметров функций измельчения: распределительной $B(x, y)$ и селективной $S(x)$ на характер и кинетику процесса. Дело в том, что при имитационном моделировании методом Монте – Карло явные зависимости $S(x)$ и $B(x, y)$ в (1) использовать нельзя и они должны быть интерпретированы на вероятности исходов при розыгрыше вариантов.

Если ограничиться процессом чистого измельчения [2] без агломерации, то в рамках рассматриваемого подхода приходим к следующей схеме имитационного моделирования периодического процесса измельчения:

1. Ансамбль частиц упорядочивается по возрастанию их масс (размеров, объёмов).
2. Разыгрывается порядковый номер частицы.
3. Если выпавшая частица “элементарная” [2], $x = 1$, то измельчения не происходит.
4. Если частица может измельчаться, $x > 1$, то для неё определяются:
 - а) селективная функция $S(x)$,
 - б) вероятность её измельчения,
 - в) разыгрывается факт: измельчится она или нет.
5. Если измельчение происходит, то определяются размеры полученных частиц на основе распределительной функции $B(x, y)$:
 - а) В рамках рассматриваемой модели согласно гипотезе элементарных переходов в ансамбле [2] определяются массы двух полученных частиц.
 - б) Для имитационной модели методом Монте – Карло при измельчении частицы массой y на 2 частицы, будем иметь их массы: x и u , причём

$$y = x + u, \quad B(x, y) = B(x, y, u). \quad (2)$$

В предлагаемой схеме 1) - 5) в течение времени t пропорциональном k – числу актов воздействия на ансамбль не все они будут эффективными, то есть приведут к измельчению или увеличению числа частиц ансамбля: будут холостые акты, когда состояние ансамбля не меняется и эффективные акты ki . Ясно, что $ki \leq k$.

Селективная функция связана с вероятностью измельчения частицы массы x : $S(x) \sim p(x)$. В литературе имеются данные о селективных функциях измельчения для различных материалов и оборудования [1, 3].

Поскольку в предлагаемой модели [2] все частицы ансамбля состоят из “элементарных” массой $x_0 = 1$, то наименьшей, способной измельчаться частицей, входящей в “измельчаемую фракцию” ансамбля будет частица с $x = 2x_0 = 2$. Пусть вероятность её измельчения, то есть образования двух частиц массой x_0 , равна p_0 , а вероятность измельчения самой крупной частицы массой $x_N = N$, состоящей из всех N частиц ансамбля, равна 1.

Считая зависимость $p(x)$ в диапазоне от $x=2$ до $x=N$ в масштабе $\log_2 x$ линейной, будем иметь

$$p(x, \alpha, X_N) = \alpha \cdot \left[p_0 + \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 X_N - 1} \cdot (1 - p_0) \right], \quad (3)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$ – вероятность (фактор интенсивности) в селективной функции. Зависимость (3) взята в качестве примера. На основании изучения конкретных способов измельчения могут быть взяты другие функции, интерпретирующие вероятность измельчения частицы по селективной функции.

При моделировании распределительной функции $B(x, y)$ методом Монте – Карло важным фактором является фактор “узости” получаемых частиц siz . Например, при $siz = 0$ из частицы с объёмом $z = 8$ получают-ся две частицы $(x, y) = (4, 4)$, а при $z = 9$ – частицы: $(x, y) = (4, 5)$ или $(x, y) = (5, 4)$. При $siz = 4$ из частиц с объёмом $z=9$ могут образоваться частицы $(x, y) = (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)$. При расчёте масс получаемых частиц x и y методом Монте – Карло отсекаются в зависимости от масса измельчаемой частицы z значения siz большего допустимого максимального, поэтому максимальное siz соответствует равновероятному получению частиц всех возможных пар. Чем меньше siz , тем “уже” функция распределения по массам получаемых фракций.

На рис. 1–4 представлены результаты имитационного моделирования измельчения в виде изменения во времени математического ожидания

$x(t)$ и среднеквадратичного отклонения $s(t)$ массы частиц ансамбля для реализаций случайного процесса.

Параметры процесса, селективной и распределительной функции следующие: $X_N = N = 64$, $p_0 = 0.2$, α и suZ указаны в подписях к рисункам.

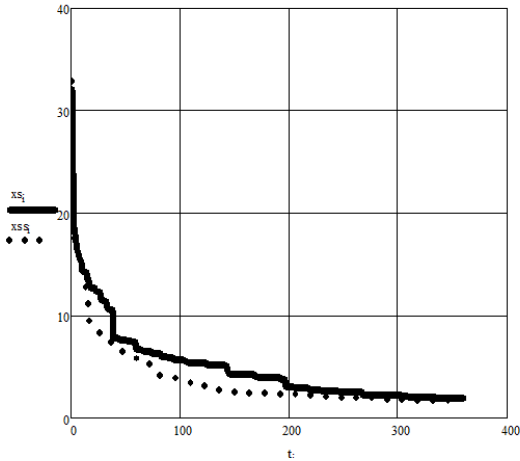


Рис. 1. $x(t)$ при $\alpha=1$ и узкой $x_s : suZ = 0$ и широкой $x_{ss} : suZ = 12$ распределительной функции

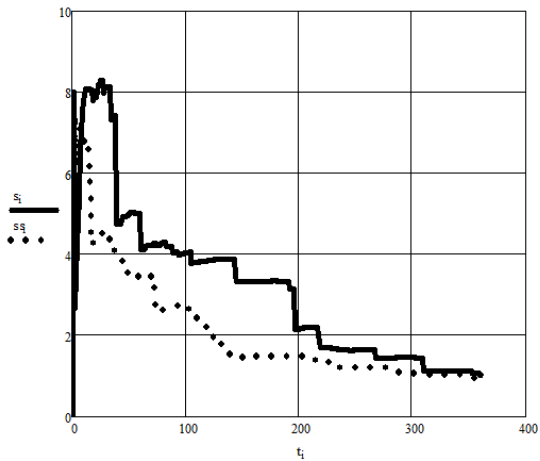


Рис. 2. $s(t)$ при $\alpha=1$ и узкой $x_s : suZ = 0$ и широкой $x_{ss} : suZ = 12$ распределительной функции

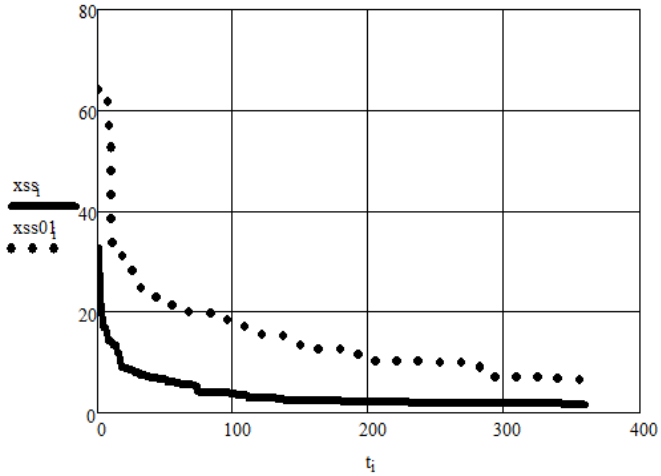


Рис. 3. Влияние параметра α селективной функции на $x(t)$, для $\alpha=1$: xss и $\alpha=0.1$: $xss01$ при $suz=12$

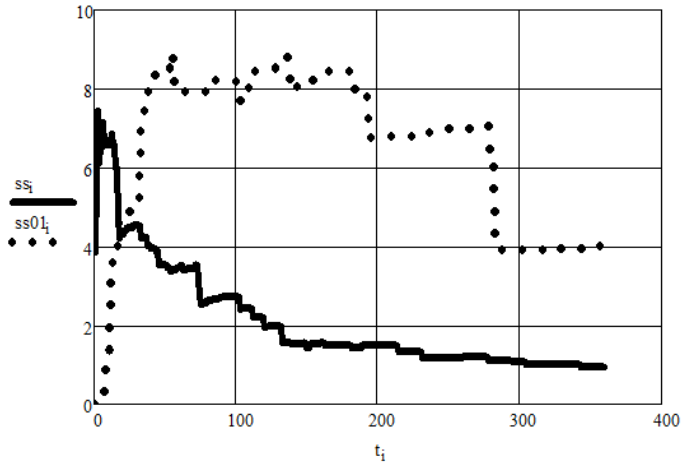


Рис. 4. Влияние параметра α селективной функции на $s(t)$, для $\alpha=1$: xss и $\alpha=0.1$: $xss01$ при $suz=12$

Таким образом, использование имитационного моделирования по-

зволяет эффективно исследовать закономерности измельчения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Язев В.А.* Аналитические решения основного уравнения кинетики измельчения / В.А. Язев, Е.М. Соловьёв, Б.Н. Басаргин // Известия вузов. Химия и хим. технология. 1992. Т.35, вып.11-12. С.102-105.
2. *Язев В.А.* Имитационное моделирование процессов агломерации и измельчения. // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. трудов. Вып.15. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2020. С. 193-198.
3. *Язев В.А.* Моделирование селективной функции измельчения резин в ножевых и фрезерных дробилках // Сб. трудов 23-й Междунар. науч. конф. ММТТ-23. Саратов. 1010. Т.5. С. 130-131.

Содержание

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

1. **Абрамов В.В.** К вопросу о бифуркации цикла системы на плоскости..... 3
2. **Башкин М.А.** О спектральной последовательности супермногообразия..... 8
3. **Букушева А.В.** О геометрии неголономных многообразий Кенмоцу..... 13
4. **Галаев С.В.** О канонической связности с параллельным кососимметрическим кручением на субримановых многообразиях.... 17
5. **Гербер А.Д.** Описание алгоритма приближенного вычисления несобственного интеграла, определяющего значения дробной производной..... 22
6. **Ройтенберг В.Ш.** Бифуркации петли сепаратрисы кусочно-гладкой динамической системы..... 32
7. **Ройтенберг В.Ш.** О предельных циклах полиномиальных дифференциальных уравнений четвертой степени с периодическими коэффициентами..... 40

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

8. **Белякова Л.В., Гулевич Н.М., Кузнецов В.О., Старостина С.А.** Комплексные числа в олимпиадных задачах..... 45
9. **Гусарова Н.И., Олейникова Е.В.** Подходы при выборе современных информационных приложений для решения математических задач..... 52
10. **Оленикова Ю.К.** Онлайн-обучение и тестирование в вузах..... 56

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

11. **Белинов М.С., Червочкин М.А., Вахромеева О.В., Павлов А.В., Соловьев В.В., Губич В.В.** Моделирование процесса компаундирования бензинов с применением этилового спирта, полученного из борщевика Сосновского..... 63
12. **Гусаров А.В.** Совершенствование математической модели распределения потока отраженных электронов в двухкоординатном датчике положения луча..... 73

13. Зубков Г.А. Метод выбора оптимального алгоритма машинного обучения для решения задач прогнозирования технического состояния космических аппаратов.....	78
14. Кондюк Д.И., Соловьёв М.Е. Моделирование динамики убиквитина.....	85
15. Королев Л.В., Бытев Д.О., Личак Д.А. Использование цепи Маркова в модели процесса измельчения с эффектами памяти...	91
16. Марьясин О.Ю. Программный комплекс для онлайн-моделирования и цифровых двойников.....	97
17. Наумов В.А. Аналитическое решение задачи закачивания воздуха водокольцевым компрессором.....	107
18. Язев В.А. Функции измельчения при имитационном моделировании.....	112

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 16

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 20.05.21. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.

Гарнитура Таймс. Офсетная печать

Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 6,97. Тираж 25. Заказ

Ярославский государственный технический университет

152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Копировальном центре ЯГТУ

152023, Ярославль, Московский пр., 88